V Brně 21. května 2013

Posudek oponenta na diplomovou práci Petry Čechové
Základní věta algebry a její důkazy

Předložená práce je věnována základní větě algebry: „Každý nekonstantní polynom s komplexními koeficienty má alespoň jeden komplexní kořen.“ Pojednává o historii vzniku této věty i o jejích prvních neúplných důkazech a dává i přehled mnoha důkazů, které jsou známy dnes. Autorka přitom pracovala s pozoruhodným množstvím cizojazyčné literatury včetně časopisecké (seznam použité literatury má 42 položek a je doplněn o dalších 22 položek rozšiřující literatury). Obsah práce značně přesahuje rozsah matematiky vyučované v povinných předmětech učitelského studia (například řada uváděných důkazů využívá komplexní analýzu).

Práce je psána velmi pečlivě, přehledně a srozumitelně, má velice pěknou grafickou úpravu, je téměř bez překlepů (našel jsem jediný na str. 8 dole). Přesto uvedu několik poznámek, které by mohly případnému čtenáři usnadnit čtení:

- str. 1: Násobnost kořene polynomu bývá definována jen nad komutativními okruhy (abychom mohli snadno pracovat s dělitelností); nebudeme muset striktně rozlišovat mezi polynomem a polynomiální funkcí jím určenou, protože budeme pracovat nad nekonečnými tělesy.
- str. 3: Důkaz věty 6 se nezabývá případem násobných kořenů.
- str. 4: V důkaze věty 7 je třeba užít, že komplexně sdružené kořeny polynomu s reálnými koeficienty mají stejnou násobnost, anebo pracovat indukcí vzhledem ke stupni polynomu.
- str. 17: Obrázek 3.2 nesouhlasí se svým popisem: $\mathrm{Re}(a_0 z^n) = 0$ je rovnice n přímek procházejících počátkem svírajících úhly o velikosti $\frac{\pi}{n}$ a $\mathrm{Im}(a_0 z^n) = 0$ je rovnice n přímek tvořících osy těchto úhlů.
- str. 18: Argumentaci na 5. řádku zdola není rozumět: co znamená, že hodnota vně kruhu roste? Asi se také nemyslí hodnota $|z|$, ale $|P(z)|$. (Podobně na str. 18 pod formulací věty 10.)
- str. 21, 4. řádek důkazu věty 11: Zde nemá být ζ reálné, ale komplexní (alespoň tak bude později použito).
- str. 23 pod čarou: Důkaz matematickou indukcí ve druhém kroku užívá nerovnosti neplynoucí z indukčního předpokladu.

- str. 26: Není jasné, co je míněno „a naopak“ na 4. řádku. Symbol $:=$ je užit neobvyklým způsobem, většinou bývá dvojtečka na straně definovaného objektu. Proč z $(x^2+b^2)|xS(x^2)$ plyne $(x^2+b^2)|S(x^2)$ není vysvětleno, snadnější by bylo odvodit $(x^2+b^2)|x^2S(x^2)$ a dostat $-b^2 \cdot S(-b^2) = 0$, odkud plyne potřebné.
- str. 28, 3. řádek: Nezápornost polynomu, která byla definována pro polynomy jedné proměnné, je užita pro polynomy dvou proměnných.
- str. 31, 7. řádek zdola: Místo „Položíme-li $-c_0/c_j = re^{\mathrm{i}\,\theta}, \ldots$“ by bylo vhodnější napsat, že zvolíme r, $\theta \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$, aby tato rovnost platila, a zmínit, že v podstatě jde o vyjadřování komplexních čísel v goniometrickém tvaru, a že tedy taková čísla jistě existují (byť ne jednoznačně určená).
- str. 33-35: Celá kapitola 4.9 obsahuje velmi vágní úvahy, které jsou místy nepřesné anebo nesrozumitelné. Například (na začátku 1. důkazu) můžeme pro zjednodušení předpokládat, že c je kružnice anebo že C je kružnice, avšak ne současně. Na obrázku 5.1 na str. 36 je křivka řezu povrchu S příkladem obrazu kružnice, který není kružnicí. Dalším příkladem je zmínka o nekonečných kořenech nad (4.18) anebo obíhání $\frac{1}{z}$ po křivce tak malé, že žádný kořen nebude ležet v oblasti jí ohraničené.
- str. 37 dole: Bylo by vhodné zmínit v (C), co je míněno absolutní hodnotou v $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$.
- str. 43, 4. řádek: Místo q_y patří q'_y.
- str. 45 nahoře: Je vysvětleno, že čitatelé $\widetilde{P}$ a $\widetilde{Q}$ jsou ohraničení v absolutní hodnotě součinem konstanty a výrazu $(x^2+y^2)^n$, není však zmíněno kde a že shora. Dále není vysvětleno, že jmenovatelé jsou podobně ohraničeni zdola.
- str. 46, řádek nad (5.15): Co znamená, že „$P(z)$ pro reálná z nevymizí?“ Bylo by vhodné zmínit, že n je stupeň polynomu P.

Považuji za nutné zdůraznit, že i přes všechny výše uvedené komentáře hodnotím předloženou práci velmi kladně, neboť významným způsobem přesahuje obvyklou úroveň diplomových prací učitelského studia matematiky. Vzhledem k tomu bez zaváhání **doporučuji předložený text uznat jako práci diplomovou a hodnotit známkou výborně**.

Radan Kučera