

**MASARYKOVA UNIVERZITA**  
**PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA**  
**ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY**

# **Diplomová práce**

**BRNO 2015**

**ANDREJ URBAN**



**MASARYKOVA UNIVERZITA**  
**PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA**  
**ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY**

---



# **Hodnocení stabilizační role monetární politiky v zemích V4: DSGE přístup**

Diplomová práce

**Andrej Urban**

**Vedoucí práce: Ing. Daniel Němec, Ph.D.    Brno 2015**

# Bibliografický záznam

- Autor:** Bc. Andrej Urban  
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita  
Ústav matematiky a statistiky
- Název práce:** Hodnocení stabilizační role monetární politiky v zemích V4: DSGE přístup
- Studijní program:** Matematika
- Studijní obor:** Finanční matematika
- Vedoucí práce:** Ing. Daniel Němec, Ph.D.
- Akademický rok:** 2014/2015
- Počet stran:** xx + 50 + 26
- Klíčová slova:** DSGE; monetární politika; Bayesovský přístup; ustálený stav; impulsní odezva; šoková dekompozice; simulace; log-linearizace; úroková sazba; devizová intervence; fixní kurz; agenti; optimalizace; malá otevřená ekonomika; Česká republika; ČNB

# Bibliografický záznam

**Autor:** Bc. Andrej Urban  
Prírodovedecká fakulta, Masarykova univerzita  
Ústav matematiky a štatistiky

**Názov práce:** Hodnotenie stabilizačnej role monetárnej politiky v krajinách V4: DSGE prístup

**Študijný program:** Matematika

**Študijný odbor:** Finančná matematika

**Vedúci práce:** Ing. Daniel Němec, Ph.D.

**Akademický rok:** 2014/2015

**Počet strán:** xx + 50 + 26

**Kľúčové slová:** DSGE; monetárna politika; Bayesovský prístup; ustálený stav; impulzná odozva; šoková dekompozícia; simulácia; log-linearizácia; úroková sadzba; devízová intervencia; fixný kurz; agenti; optimalizácia; malá otvorená ekonomika; Česká republika; ČNB

# Bibliographic Entry

**Author:** Bc. Andrej Urban  
Faculty of Science, Masaryk University  
Department of Mathematics and Statistics

**Title of Thesis:** Evaluating monetary stabilization policy in the Visegrad countries: A DSGE approach

**Degree Programme:** Mathematics

**Field of Study:** Financial Mathematics

**Supervisor:** Ing. Daniel Němec, Ph.D.

**Academic Year:** 2014/2015

**Number of Pages:** xx + 50 + 26

**Keywords:** DSGE; monetary policy; Bayesian approach; steady state; impulse response; shock decomposition; simulation; log-linearization; interest rate; foreign exchange intervention; fixed exchange rate (PEG); agents; optimization; small open economy (SOE); Czech Republic; CNB

# Abstrakt

Cílem této práce je zhodnocení role monetární politiky v České republice za posledních 15 let. Nástrojem analýzy je dynamický stochastický model všeobecné rovnováhy (DSGE model) malé otevřené ekonomiky, jehož odhad je proveden na reálných datech za použití Bayesovských metod. Prozkoumány byly zejména vlivy dvou hlavních nástrojů monetární autority – měnověpolitické úrokové sazby a nominální směnný kurz.

# Abstrakt

Cieľom tejto diplomovej práce je zhodnotenie role monetárnej politiky v Českej republike za posledných 15 rokov. Nástrojom analýzy je dynamický stochastický model všeobecnej rovnováhy (DSGE model) malej otvorenej ekonomiky, ktorého odhad je prevedený na reálnych dátach za použitia Bayesovských metód. Preskúmané boli najmä vplyvy dvoch hlavných nástrojov monetárnej autority – menovopolitické úrokové sadzby a nominálny výmenný kurz.

# Abstract

The purpose of this diploma thesis is to evaluate the role of monetary policy in the Czech Republic for the last 15 years. Analysis tool is the Dynamic Stochastic General Equilibrium model (DSGE model) of small open economy, which is estimated by real data using Bayesian methods. We examined the effects of the two main instruments of monetary policy – the monetary policy interest rates and the nominal exchange rate.



Masarykova univerzita



Přírodovědecká fakulta

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Bc. Andrej Urban**  
Studijní program: **Matematika**  
Studijní obor: **Finanční matematika**

Ředitel Ústavu matematiky a statistiky PŘF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje diplomovou práci s tématem:

**Hodnocení stabilizační role monetární politiky v zemích V4: DSGE přístup**

**Evaluating monetary stabilization policy in the Visegrad countries: A DSGE approach**

*Oficiální zadání:* Cílem práce bude zhodnotit účinnost resp. význam role monetární politiky v historickém období posledních 15 let v zemích skupiny V4 a vzájemně pak účinnost stabilizační role monetární autority porovnat. Nástrojem analýzy bude vhodný dynamický stochastický model všeobecné rovnováhy otevřené ekonomiky (spíše menšího rozsahu), který bude na reálných datech identifikován bayesovskými metodami. Postup práce by měl být následující: 1. Stručné představení historického vývoje ekonomik zemí V4 z pohledu makroekonomie a rovněž i vývoje monetární politiky těchto zemí. 2. Volba DSGE modelu pro otevřenou ekonomiku, jeho matematické odvození a popis. 3. Představení dat a odhadových technik (včetně zdůvodnění nastavení apriorních hustot, kalibrovaných parametrů apod.). 4. Identifikace modelů na reálných datech, provedení diagnostických testů, historické šokové dekompozice, variační dekompozice v souladu se zadaným cílem práce (případně i odvození stability odhadů parametrů). 5. Věcné zhodnocení výsledků a jejich interpretace, porovnání rolí jednotlivých centrálních bank v průběhu hospodářských cyklů zkoumaných zemí. Práce bude vypracována ve slovenském jazyce.

### Doporučená literatura

CANOVA, Fabio. Methods for applied macroeconomic research. Princeton: Princeton University Press, 2007. xiv, 492 s. ISBN 978-0-691-11504-7.,

Structural macroeconometrics. Edited by David N. DeJong - Chetan Dave. Princeton: Princeton University Press, 2007. xiv, 338 s. ISBN 978-0-691-12648-7.,


Monetary policy, inflation, and the business cycle :an introduction to the new Keynesian framework. Edited by Jordi Galí. Princeton: Princeton University Press, 2008. xi, 203 s. ISBN 978-0-691-13316-4.,

Bayesian econometrics. Edited by Gary Koop. Chichester: Wiley, 2003. xi, 359 s. ISBN 9780470845677.:


*Vedoucí diplomové práce:* Ing. Daniel Němec, Ph.D.


*Datum zadání diplomové práce:* říjen 2013

V Brně dne 31. 10. 2013

  
prof. RNDr. Jiří Rosický, DrSc.  
ředitel Ústavu matematiky a statistiky

Souhlasím se zadáním (datum, podpis):

  
.....  
student(ka)

  
.....  
vedoucí práce

# Poděkování

Na tomto mieste by som chcel nekonečne veľakrát poďakovať doktorovi Danielovi Němcovi za vynikajúce vedenie mojej práce, za jeho snahu a ochotu pomáhať všetkým študentom a za jeho prístup k riešeniu problémov. Ďalšie ďakujem patrí kolegovi Martinovi Macíčkovi za poskytnutie cenných rád, materiálov a doporučení v danej problematike. Za pomoc v oblasti programu  $\LaTeX$  ďakujem kolegom Jakubovi Bučkovi a Petre Kianičkovej. V neposlednej rade si poďakovanie zaslúžia aj blízki, rodina, milovaná priateľka, spolubývajúci, a to najmä za podporu a dodávanie energetických zdrojov v náročných časoch tvorby tohto dokumentu.

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracoval samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 12. mája 2015

.....  
Andrej Urban

# Obsah

<b>Zoznam tabuliek</b> .....	<b>x</b>
<b>Zoznam obrázkov</b> .....	<b>xi</b>
<b>Úvod</b> .....	<b>xii</b>
<b>1. Model</b> .....	<b>1</b>
1.1 Domácnosti .....	2
1.1.1 Individuálna optimalizácia .....	3
1.1.2 Užitočné definície a identity .....	5
1.1.3 Medzinárodné rozdelenie rizika a nekrytá úroková parita (UIP) .....	7
1.1.4 Agregácia naprieč skupinami .....	9
1.2 Firmy .....	11
1.2.1 Technológia .....	11
1.2.2 Voľba ceny .....	12
1.3 Rovnováha .....	14
1.3.1 Strana dopytu .....	14
1.3.2 Strana ponuky .....	17
1.4 Kanonická reprezentácia modelu .....	18
1.4.1 Novokeynesiánska Phillipsova krivka .....	19
1.4.2 Dynamická IS krivka .....	19
1.4.3 Rovnica akciového indexu .....	19
1.4.4 Monetárna politika .....	19
1.4.5 Zahraničie .....	20
1.4.6 Šoky .....	21
<b>2. Popis použitých techník</b> .....	<b>22</b>
2.1 Dynamický model s racionálnymi očakávaniami .....	22
2.1.1 Kalmanov filter .....	23
2.2 Bayesovské metódy .....	24
2.2.1 Metropolis–Hastings algoritmus .....	25
2.2.2 Random Walk Chain M–H algoritmus .....	27
2.3 Hodrick–Prescottov filter .....	28
2.4 Stochastické simulácie .....	28
<b>3. Odhad a analýza výsledkov</b> .....	<b>30</b>
3.1 Dáta .....	30

3.2	Kalibrácia parametrov	31
3.3	Apriórne a posteriórne informácie	32
3.4	Impulzné odozvy	37
3.5	Šokové dekompozície	39
3.6	Simulované a skutočné momenty	41
<b>4.</b>	<b>Analýza monetárnych nástrojov</b>	<b>43</b>
4.1	Simulované impulzné odozvy	44
4.2	Simulované momenty	45
	<b>Záver</b>	<b>47</b>
	<b>Literatúra</b>	<b>49</b>
	<b>Apendix A. Modelový apendix</b>	<b>51</b>
A.1	Apendix: Domácnosti	51
A.1.1	Maximalizácia úžitku podmienená rozpočtovým obmedzením	51
A.1.2	Log-linearizácie rovníc	53
A.1.3	Inflácie	56
A.1.4	Rozpočtové obmedzenie do tvaru SDR	57
A.1.5	Odvodenie rovnice 1.38	57
A.1.6	Odvodenie rovnice 1.47	58
A.2	Apendix: Firmy	59
A.2.1	Priemerná dĺžka platnosti ceny	59
A.3	Apendix: Rovnováha	60
A.3.1	Ustálené stavy a iné vzťahy	60
A.3.2	Log-linearizácie rovníc strany dopytu	60
A.3.3	Log-linearizácie rovníc strany ponuky	63
A.3.4	Odvodenie hybridnej Phillipsovej krivky 1.81	63
A.4	Apendix: Kanonická reprezentácia	65
A.4.1	Odvodenie dynamickej IS krivky 1.84	65
A.4.2	Odvodenie rovnice akciového indexu 1.86	65
A.5	Súhrn rovníc odhadnutého modelu	66
	<b>Apendix B. Tabuľky</b>	<b>67</b>
	<b>Apendix C. Obrázky</b>	<b>71</b>

# Zoznam tabuliek

3.1	Kalibrované parametre . . . . .	32
3.2	Odhadnuté parametre VAR(1) modelu . . . . .	32
3.3	Používané apriórne rozdelenia . . . . .	32
3.4	Apriórne a posteriórne informácie . . . . .	33
3.5	Porovnanie dát s modelom: Priemer (%) . . . . .	41
3.6	Porovnanie dát s modelom: Smerodajná odchýlka (%) . . . . .	41
3.7	Porovnanie dát s modelom: Autokorelácie . . . . .	42
3.8	Porovnanie dát s modelom: Korelácie . . . . .	42
4.1	Porovnanie monetárnych režimov: Priemer (%) . . . . .	46
4.2	Porovnanie monetárnych režimov: Autokorelácie . . . . .	46
4.3	Porovnanie monetárnych režimov: Korelácie . . . . .	46
B.1	Premenné finančného trhu . . . . .	67
B.2	Ceny, cenové indexy a výmenné relácie . . . . .	68
B.3	Dopyty a spotrebné indexy . . . . .	68
B.4	Ostatné modelové premenné . . . . .	69
B.5	Parametre modelu . . . . .	69
B.6	Parametre ako funkcie ostatných parametrov . . . . .	70
B.7	Korelačná matica šokov odhadnutého modelu . . . . .	70

# Zoznam obrázkov

3.1	Štrukturálne parametre a parametre Taylorovho pravidla . . . . .	34
3.2	Parametre perzistencie AR(1) procesov . . . . .	36
3.3	Smerodajné odchýlky exogénnych šokov . . . . .	36
3.4	Impulzná odozva na šok v produktivite (%) . . . . .	37
3.5	Impulzná odozva na monetárny šok (%) . . . . .	38
3.6	Impulzná odozva na nákladový šok . . . . .	39
3.7	Historická šoková dekompozícia: Výstup (% odchýlky) . . . . .	40
3.8	Historická šoková dekompozícia: Inflácia CPI (% odchýlky) . . . . .	40
4.1	Úrokové sadzby Českej republiky (% p. a.) . . . . .	43
4.2	Impulzná odozva na šok v produktivite (%) . . . . .	44
4.3	Impulzná odozva na nákladový šok (%) . . . . .	45
C.1	Konvergenčná diagnostika MCMC algoritmu . . . . .	71
C.2	Originálne dáta . . . . .	72
C.3	Pozorované premenné ako % odchýlky od ustálených stavov . . . . .	72
C.4	Vyhladené exogénne šoky . . . . .	73

# Úvod

Súčasná situácia svetovej ekonomiky sa nachádza v stave, kedy je na mieste klásť si otázky typu: „Je možné, aby bola expanzívna politika centrálnych autorít vykonávaná pomocou štandardného nástroja – menovopolitických úrokových sadzieb?“ Táto otázka je aktuálna hlavne v súčasnom období, kedy už tieto sadzby nemajú priestor k poklesu – dosiahli nulovú dolnú medzu, ale zároveň narastá potreba ďalšieho uvoľnenia menových podmienok.

Svetová finančná a ekonomická kríza a následné obdobie hospodárskeho útlmu a poklesu inflácie donútili mnoho centrálnych bánk začať využívať výnimočné (tzv. neštandardné či nekonvenčné) nástroje menovej politiky. Americká centrálna banka Fed, britská Bank of England aj Európska centrálna banka pristúpili v rokoch 2007–2013 k nákupu cenných papierov a masívnemu dodávaniu likvidity do ekonomiky, Švajčiarska centrálna banka od septembra 2011 vyhlásila minimálny kurz („floor“) franku voči euru podopretý intervenciami na devízovom trhu.

Česká národná banka (ČNB) vystačila v období rokov 2007–2012 so štandardnými nástrojmi menovej politiky, keď postupne znížila svoje úrokové sadzby od augusta 2008 do novembra 2012 takmer o 4 percentuálne body. K uvoľneniu menových podmienok od polovice roku 2008 zároveň výrazne prispelo spontánne oslabenie kurzu koruny v reakcii na pokles zahraničného dopytu aj dopytu domácej ekonomiky, t. j. kurz vtedy osvedčil svoju schopnosť pôsobiť ako automatický prispôsobovací mechanizmus, ktorý má česká ekonomika so samostatnou menovou politikou k dispozícii.

Česká národná banka drží štátom daný mandát, podľa ktorého má udržiavať stabilný rast cenovej hladiny niekde na úrovni 2%. Z výsledkov jej analýz spred dvoch rokov plynulo, že by sa začiatkom roka 2014 inflácia prepadla do záporných hodnôt a hrozilo by, že tento vývoj prerastie do dlhodobej deflácie so všetkými nepriaznivými dôsledkami na ekonomický vývoj. Zo skúsenosti Japonska a jeho potácania sa v deflačnej špirále pristúpila ČNB v novembri 2013 k devízovej intervencii<sup>1</sup>. Nejedná sa o typickú intervenciu, ale o akýsi asymetrický kurzový záväzok, kde si centrálna banka volí a verejne vyhlási konkrétnu hladinu menového kurzu (v prípade ČNB ide o minimálnu hranicu na úrovni 27 CZK/EUR), ktorú chce dosiahnuť, a pre jej dosiahnutie je pripravená intervenovať na devízovom trhu vo vopred nestanovenom a neobmedzenom rozsahu. Prečo si spomedzi alternatív vybrala práve oslabenie domácej meny? Konala tak s ohľadom na veľkú otvorenosť českej ekonomiky s dobre preskúmanou transmisíou menového kurzu, dlhodobý prebytok likvidity v bankovom sektore a pomerne plytké trhy súkromných dlhových cenných papierov.

V každom prípade môžeme sledovať novú situáciu v politike centrálnej authority. Zrejme nepôjde len o krátkodobú zmenu, pretože banka sa zaviazala intervenovať minimálne do roku 2016. S ohľadom na tento fakt sa pokúsime preskúmať rozdiely medzi dvomi hlavnými nástrojmi centrálnej

---

<sup>1</sup>ide o prvú intervenciu od roku 2002

banky – menovopolitickými úrokovými sadzbami a výmenným kurzom.

Napriek tomu, že zadanie práce naznačuje prieskum krajín V4, rozhodli sme sa analyzovať len Českú republiku a to kvôli rozsahovej a tematickej náročnosti. Rozšírenie v podobe analýzy ostatných troch krajín Vyšehradskej skupiny a vzájomné porovnanie by mohlo byť predmetom ďalších štúdií.

Cieľom práce je teda zhodnotenie role monetárnej politiky v ČR za posledných 15 rokov. Použitým nástrojom k naplneniu tohto cieľa bude dynamický stochastický model všeobecnej rovnováhy malej otvorenej ekonomiky. Model bude identifikovaný s využitím Bayesovských metód.

Práca je koncipovaná do štyroch kapitol. Prvá je venovaná odvodeniu modelu malej otvorenej ekonomiky z článku Funke, Paetz a Pytlarczyk (2011) [13]. Autori vo svojej štúdií používali monetárny režim fixného kurzu na ekonomike Hong Kongu. Model je v určitých častiach obohatený pomocou iných prác a najdôležitejšia zmena sa týka monetárnej politiky. Režim fixného kurzu je pri odhade nahradený Taylorovým pravidlom, ktorý prispôsobuje úrokovú mieru vzhľadom k zmenám v inflácii, výstupe a kurzu. Táto verzia by mala zodpovedať vývoju v pozorovanom období 2000–2012. Odhadovať model s fixným kurzom by nezodpovedalo realite z minulosti a krátke obdobie nového trendu vo fixovaní kurzu zatiaľ neposkytuje dostatok pozorovaní. V poslednej kapitole sú vďaka impulzným odozvám a simulovaným momentom porovnávané tieto dva monetárne nástroje.

Druhá časť sa zaoberá metodologickým rámcom, kde sú stručne predstavené všetky používané techniky ako napr. dynamický model s racionálnymi očakávaniami, Kalmanov filter, Hodrick–Prescottov filter, ale aj Bayesovské nástroje, ako napr. posteriórna a apriórna hustota pravdepodobnosti, či Metropolis–Hastings algoritmus.

V tretej kapitole sa nachádza samotný odhad log–linearizovaného dynamického modelu na českej ekonomike, vecné zhodnotenie výsledkov posteriórnych stredných hodnôt, impulzné odozvy, šokové dekompozície a porovnávanie simulovaných a skutočných momentov. Tiež je tu možné nájsť popis použitých makroekonomických dát, apriórne hodnoty a kalibrácie parametrov.

Okrem týchto štyroch kapitol sa v práci nachádza ešte appendix, ktorý obsahuje procesy optimalizácie, log–linearizácie a ďalšie matematické úpravy.

# Kapitola 1

## Model

V tejto kapitole ponúkame odvodenie DSGE modelu malej uzavretej ekonomiky z článku Funke, Paetz a Pytlarczyk (2011) [13], ktorí ho aplikovali na ekonomiku Hong Kongu s fixným kurzom. Tento model bol vyvinutý najmä z prác Nisticó (2005) [24], Galí a Monacelli (2005) [16] a štúdie Lubik a Schorfheide (2007) [22].

Model klasicky pozostáva z troch agentov, t. j. ide o domácnosti, firmy a centrálnu banku<sup>1</sup>. Typickou črtou Novokeynesiánskych modelov je racionálne správanie sa a optimalizácia agentov. Presnejšie sa jedná o maximalizáciu úžitku domácností zo spotreby a voľného času a o snahu firiem maximalizovať zisk alebo minimalizovať náklady. Domácnosti ponúkajú prácu firmám a naopak firmy prácu dopytujú a platia za ňu mzdovými sadzbami. Výstup firmy tvorí spotrebu domácností. Bližšie oboznámime o tomto procese v jednotlivých podkapitolách.

Tretí agent – centrálna banka – vykonáva menovú politiku. Jej hlavnou úlohou je stabilizácia cenovej hladiny a mala by byť nezávislá. Poznáme viacero nástrojov ako môže banka svoj cieľ dosiahnuť, napr. pohyby úrokových sadzieb, devízové intervencie, či povinné minimálne rezervy. Prvé menované budeme modelovať pomocou Taylorovho pravidla a tento nástroj porovnáme s režimom fixného kurzu dosiahnutého pomocou operácií na devízovom trhu.

Úlohou nášho modelu je popis malej otvorenej ekonomiky, no k tomu budeme potrebovať „rozdeliť“ svet na kontinuum nekonečne malých ekonomík (domáca ekonomika bez indexu a ostatné značené indexom  $i \in [0, 1]$ ) – čiže každá z nich má zanedbateľnú veľkosť vzhľadom ku svetu. Zahraničné krajiny po agregovaní generujú zahraničie značené pomocou indexu  $*$ . V každej ekonomike je  $k \in [0, 1]$  firiem, každá ekonomika sa skladá z nekonečného množstva skupín  $j \in [0, 1]$ .

Všetky modelové rovnice postavené na mikro–základoch budú odvodzované pre domácu ekonomiku. Pre zahraničné krajiny ich odvodíme len tam, kde sú nevyhnutné (inak sú odvoditeľné analogicky ako pre domácu ekonomiku).

Spomenieme ešte niekoľko predpokladov kladených na náš model, aj s príslušnými odkazmi na literatúru. Trhy budú modelované pomocou monopolistickej konkurencie ako v Dixit a Stiglitz (1977) [10] a zachovaný bude aj koncept cenových rigidít alá Calvo (1983) [4]. Ďalej zavedieme rámec dvojstupňovej výroby (podrobnejšie v časti týkajúcej sa firiem). Je možné ukázať, že pred-

---

<sup>1</sup>vláda v našom modeli nebude hrať žiadnu rolu nakoľko predpokladáme, že všetky svoje príjmy z daní alokuje medzi domácnosti

poklad medzinárodne rozdeleného rizika<sup>2</sup> implikuje platnosť nekrytej úrokovej parity<sup>3</sup> (ďalej aj UIP). Ak navyše uvažujeme aj platnosť zákona jednej ceny<sup>4</sup> (ďalej aj LOOP) na úrovni značiek, tak je splnená parita kúpnej sily<sup>5</sup> (ďalej aj PPP) v každom okamihu. Viac o tomto procese je možné sa dočítať v Lubik a Schorfheide (2005) [21]. Inflačná zotrvačnosť je zaručená predpokladom, že časť cenotvorcov je tzv. vzad-hľadiacich (details v časti venovanej hybridnej Novokeynesiánskej Phillipsovej krivke). V modeli neuvažujeme peňažný trh a modelujeme teda každú ekonomiku ako bezhotovostnú<sup>6</sup>. Posledným konštatovaním je, že model úspešne čelí tzv. Lucasovej kritike (viac v Lucas (1976) [23]), ktorá protestuje proti predpokladu nemenného správania systému. Je tomu tak preto, lebo v DSGE modeloch sa parametre modelu aj správanie agentov vplyvom zmeny politiky menia.

Model je komplexný a vystupuje v ňom veľa premenných a parametrov. V prílohe B ponúkame prehľad premenných v tabuľkách B.1, B.2, B.3 a B.4. Prehľad parametrov je v tabuľke B.5. Z dôvodu viacerých substitúcií parametrov sme pridali aj tabuľku B.6 obsahujúcu ďalšie parametre ako funkcie ostatných parametrov.

## 1.1 Domácnosti

Každá skupina domácností  $j$  čelí v čase konštantnej pravdepodobnosti úmrtia  $\gamma$  (to implikuje očakávanú dĺžku života spotrebiteľa resp. dĺžku jeho efektívneho rozhodovania na úrovni  $1/\gamma$ ). Abstrahovaním od populačného rastu je veľkosť skupiny implicitne nastavená na hodnotu  $\gamma$  (viď Nisticó (2005) [24]).

Domácnosti ponúkajú prácu  $N_t(j)$  za výplatu a dopytujú spotrebu  $C_t(j)$ , za ktorú musia platiť. Tiež volia, aký typ finančného aktíva kúpi – štátne dlhopisy alebo majetkové podiely (akcie) firmiem. Celkovo majú na výber:

- domáce dlhopisy: množstvo označujeme pomocou  $B_t(j)$  ... kúpa v čase  $t - 1$  a splatnosť v čase  $t$
- zahraničné dlhopisy: množstvo označujeme pomocou  $B_t^i(j)$  ... kúpa v čase  $t - 1$  a splatnosť v čase  $t$
- akcie domácej<sup>7</sup> firmy  $k$ , ktorá vyrába medzi–statky: cena akcie firmy  $k$  je  $Q_t(k)$ , dividendový výnos je  $D_t(k)$  a množstvo akcií firmy  $k$  držané domácou skupinou  $j$  značíme  $Z_t(k, j)$

<sup>2</sup>preklad z angl. *International Risk-Sharing* – ide o situáciu, kde nominálne hrubé výnosy medzištátne obchodovateľných štátnych dlhopisov sú rovnaké pre všetky krajiny

<sup>3</sup>preklad z angl. *Uncovered Interest Parity*

<sup>4</sup>preklad z angl. *Law Of One Price*

<sup>5</sup>preklad z angl. *Purchasing Power Parity*

<sup>6</sup>ponuka peňazí sa prispôbuje, aby vyčistila trh – peniaze nemodelujeme explicitne, ale používame len ako zúčtovaciu jednotku

<sup>7</sup>nie zahraničnej – ide o zjednodušujúci predpoklad, rovnako ani zahraničný štát nemôže kupovať žiadne akcie domácich firmiem

### 1.1.1 Individuálna optimalizácia

Začneme vývojom modelu. *Nominálne finančné bohatstvo* jedinca z domácej skupiny  $j$  je definované vzťahom:

$$\Omega_t(j) \equiv \frac{1}{1-\gamma} \left[ B_t(j) + \int_0^1 \Xi_t^i B_t^i(j) di + \int_0^1 (Q_t(k) + D_t(k)) Z_t(k, j) dk \right], \quad (1.1)$$

kde  $\Xi_t^i$  je nominálny bilaterálny (vzájomný) výmenný kurz – množstvo domácej meny za jednotku meny  $i$ -tej zahraničnej krajiny. Ide o priamu kotáciu, kde nárast kurzu znamená depreciaáciu domácej meny. Toto bohatstvo pozostáva z domácich a zahraničných dlhopisov, kúpených v minulom období a z portfólia akcií. Diskontný faktor  $\frac{1}{1-\gamma}$  zaisťuje výplaty poistného pozostalým z dôvodu úmrtia ich blízkych:  $\uparrow \gamma \Rightarrow \uparrow \Omega_t(j)$  – viac napr. v Blanchard (1985) [2].

Reprezentatívne domácnosti maximalizujú nekonečnú sumu očakávaných úžitkov, teda *hodnotovú funkciu*:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (1-\gamma)^t [\ln(C_t(j)) + \ln(1-N_t(j))], \quad (1.2)$$

kde  $\beta$  je diskontný faktor domácností. Hodnotová funkcia je aditívne separabilná a je podmienená prežitím domácností. Ide o úžitkovú funkciu s konštantnou elasticitou substitúcie (CES) = 1 resp. s konštantnou relatívnou mierou averzie voči riziku (CRRA). Domácnosti vhodne volia spotrebu  $C_t(j)$ , množstvo ponúkanej práce  $N_t(j)$  a nimi držané finančné aktíva.

Optimalizácia prebieha vzhľadom k postupnosti dynamických *rozpočtových obmedzení*, kde členy nedelené cenovým indexom  $P_t$  sú reálne, nie nominálne:

$$C_t(j) + \frac{E_t \{F_{t,t+1} B_{t+1}(j)\}}{P_t} + \int_0^1 \frac{\Xi_t^i}{P_t} E_t \{F_{t,t+1} B_{t+1}^i(j)\} di + \int_0^1 \frac{Q_t(k) Z_{t+1}(k, j)}{P_t} dk = \frac{W_t}{P_t} N_t(j) - T_t(j) + \frac{\Omega_t(j)}{P_t}. \quad (1.3)$$

Okrem spomínaných veličín vystupuje nominálna mzda  $W_t$ , reálne vládne dane  $T_t(j)$  uvalené na  $j$ -tú skupinu a diskontný faktor  $F_{t,t+1}$  pre pohľadávky z dlhopisov<sup>8</sup>. Na ľavej strane rovnice máme výdaje domácností v období  $t$  a na pravej strane máme zase príjmy domácností za obdobie  $t$ .<sup>9</sup>

Definícia *nominálneho ľudského bohatstva* domácej krajiny je nasledovná:

$$H_t(j) \equiv E_t \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} F_{t,t+k} (1-\gamma)^k (W_{t+k} N_{t+k}(j) - P_{t+k} T_{t+k}(j)) \right\}. \quad (1.4)$$

Inak povedané ide o sumu diskontovaných očakávaných neobchodovateľných príjmov (reálne príjmy z práce očistené od daní) nevyhnutných na živobytie.

Optimalizácia domácností je odvodená v apendixe v časti A.1.1. Výsledkom sú rovnice:

- intratemporálna optimálna alokácia domácností medzi spotrebu a voľný čas:

$$\frac{C_t(j)}{1-N_t(j)} = \frac{W_t}{P_t} \quad (1.5)$$

<sup>8</sup>  $B_{t+1}(j) * F_{t,t+1}$  je vlastne súčasná hodnota (v čase  $t$ ) dlhopisu splatného v čase  $t+1$ ; premenná je navyše rovná pre všetky krajiny, lebo abstrahujeme od možnej arbitráže

<sup>9</sup> v práci Galí (2008) [14] je ukázané že člen  $C_t(j) P_t$  v rozpočtovom obmedzení vznikne kombinovaním  $\int_0^1 C_{H,t}(k, j) P_{H,t}(k) dk + \int_0^1 \int_0^1 C_{i,t}(k, j) P_{i,t}(k) dk di$  a neskôr definovaných spotrebiteľských a cenových indexov

- Eulerova rovnica popisujúca optimálnu spotrebu medzi obdobiami – inak aj rovnosť medzi stochastickým diskontným faktorom jednoobdobových nominálnych výnosov  $F_{t,t+1}$  a časovo diskontovaným stochastickým rastom v medznom úžitku zo spotreby:

$$E_t \{F_{t,t+1}\} = \beta E_t \left\{ \frac{P_t C_t(j)}{P_{t+1} C_{t+1}(j)} \right\} \quad (1.6)$$

- rovnica popisujúca dynamiku cien akcií – nominálna cena portfólia sa rovná očakávaným príjmom (ešte však diskontovaným na súčasnú hodnotu pomocou  $F_{t,t+1}$ ) z portfólia v čase  $t+1$ :

$$Q_t(k) = E_t \{F_{t,t+1}(Q_{t+1}(k) + D_{t+1}(k))\}. \quad (1.7)$$

Tieto optimálne podmienky nám zaisťujú, že domácnosti nevedia ťažiť z možných realokácií spotreby medzi obdobiami – neexistencia arbitráže.

Domáci spotrebiteľia dopytujú kompozitný agregát (na základe práce Dixit a Stiglitz (1977) [10]), ktorý je zložený z domácich výrobkov a importov zo zahraničia. Pre  $j$ -tu domácu skupinu teda definujeme *spotrebiteľský index*:

$$C_t(j) \equiv \left[ (1 - \alpha)^{\frac{1}{\omega}} C_{H,t}(j)^{\frac{\omega-1}{\omega}} + \alpha^{\frac{1}{\omega}} C_{F,t}(j)^{\frac{\omega-1}{\omega}} \right]^{\frac{\omega}{\omega-1}}, \quad (1.8)$$

kde  $C_{H,t}(j)$  je dopyt po domácich finálnych statkoch,  $C_{F,t}(j)$  je dopyt po zahraničných finálnych statkoch a parameter  $\alpha$  je miera otvorenosti domácej krajiny. Elasticita substitúcie medzi domácimi a zahraničnými statkami je konštantná a označená pomocou  $\omega$ . Jednotlivé spotrebiteľské indexy definujeme ako CES funkcie, čiže funkcie s konštantnou mierou elasticity v čase a aj medzi krajinami:

- dopyt po domácich finálnych statkoch  $\equiv$  agregát cez dopyty po statkoch všetkých domácich firiem  $k$ :

$$C_{H,t}(j) \equiv \left[ \int_0^1 C_{H,t}(k, j)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dk \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \quad (1.9)$$

- dopyt po finálnych statkoch (importoch) zahraničnej krajiny  $i \equiv$  agregát cez dopyty po statkoch všetkých firiem  $k$  krajiny  $i$ :

$$C_{i,t}(j) \equiv \left[ \int_0^1 C_{i,t}(k, j)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dk \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \quad (1.10)$$

- dopyt po zahraničných finálnych statkoch (celkových importoch)  $\equiv$  agregát cez dopyty po importoch zo všetkých zahraničných krajín  $i$ :

$$C_{F,t}(j) \equiv \left[ \int_0^1 C_{i,t}(j)^{\frac{\zeta-1}{\zeta}} di \right]^{\frac{\zeta}{\zeta-1}}, \quad (1.11)$$

kde  $\varepsilon$  je elasticita substitúcie medzi rôznymi statkami resp. firmami v rámci jednej krajiny a  $\zeta$  je elasticita substitúcie medzi statkami rôznych krajín.

Podobne ako spotrebiteľské indexy definujeme aj *cenové indexy*. Index CPI domácej krajiny má tvar:

$$P_t \equiv \left[ (1 - \alpha) P_{H,t}^{1-\omega} + \alpha P_{F,t}^{1-\omega} \right]^{\frac{1}{1-\omega}}. \quad (1.12)$$

Skladá sa z jednotlivých cenových indexov, ktoré už nemajú charakter CPI (index spotrebiteľských cien), ale PPI (index cien výrobcov, čiže ceny toho čo sa vyrobí):

- PPI domácich statkov  $\equiv$  agregát cez ceny statkov všetkých domácich firiem  $k$

$$P_{H,t} \equiv \left[ \int_0^1 P_{H,t}(k)^{1-\varepsilon} dk \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \quad (1.13)$$

- PPI statkov zahraničnej krajiny  $i \equiv$  agregát cez ceny statkov všetkých firiem  $k$  krajiny  $i$

$$P_{i,t} \equiv \left[ \int_0^1 P_{i,t}(k)^{1-\varepsilon} dk \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \quad (1.14)$$

- PPI zahraničných statkov  $\equiv$  agregát cez PPI všetkých zahraničných krajín  $i$

$$P_{F,t} \equiv \left[ \int_0^1 P_{i,t}^{1-\zeta} di \right]^{\frac{1}{1-\zeta}}. \quad (1.15)$$

Všetky indexy sú vyjadrené v domácej mene. Analogickým spôsobom je možné odvodiť spotrebiťské indexy  $C_t^i(j)$  a CPI indexy  $P_t^i$  všetkých zahraničných krajín  $i$ .

V apendixe práce Tvrz (2012) [26] je uvedený prehľadný postup ako odvodiť *dopytové rovnice* optimálnej alokácie domácností medzi domáce a importované statky:

- dopyt domácej skupiny  $j$  po domácich statkoch:

$$C_{H,t}(j) = (1 - \alpha) \left[ \frac{P_{H,t}}{P_t} \right]^{-\omega} C_t(j) \quad (1.16)$$

- dopyt domácej skupiny  $j$  po zahraničných statkoch (importoch):

$$C_{F,t}(j) = \alpha \left[ \frac{P_{F,t}}{P_t} \right]^{-\omega} C_t(j) \quad (1.17)$$

- dopyt domácej skupiny  $j$  po statkoch (importoch)  $i$ -tej zahraničnej krajiny:

$$C_{i,t}(j) = \left[ \frac{P_{i,t}}{P_{F,t}} \right]^{-\zeta} C_{F,t}(j). \quad (1.18)$$

Podobné vzťahy platia pre všetky ostatné krajiny  $i$ .

### 1.1.2 Užitočné definície a identity

V tejto časti ponúkame niekoľko užitočných definícií a identít, ktoré budú neskôr potrebné.

#### Výmenné relácie

Výmenné relácie<sup>10</sup> (ďalej aj ToT) počíta napr. Wickens (2012) [28] ako pomer cien importov (v domácej mene) ku cenám exportov. Na rozdiel od reálneho výmenného kurzu, započítavajú len

<sup>10</sup>preklad z angl. *Terms of Trade*

obchodovateľné statky. Rast ToT implikuje depreciáciu reálneho kurzu resp. rast konkurencieschopnosti. V našom modeli použijeme definíciu *vzájomnej výmennej relácie* medzi domácou a  $i$ -tou krajinou v podobe:

$$S_{i,t} \equiv \frac{P_{i,t}}{P_{H,t}}. \quad (1.19)$$

Ďalej definujme výmennú reláciu medzi domácou krajinou a zahraničím, tzv. *efektívnu výmennú reláciu*:

$$S_t \equiv \frac{P_{F,t}}{P_{H,t}}, \quad (1.20)$$

ktorú vieme po dosadení za  $P_{F,t}$  z definície 1.15 vyjadriť nasledovne:

$$S_t = \frac{\left( \int_0^1 P_{i,t}^{1-\zeta} di \right)^{\frac{1}{1-\zeta}}}{P_{H,t}} = \left( \int_0^1 S_{i,t}^{1-\zeta} di \right)^{\frac{1}{1-\zeta}}. \quad (1.21)$$

V apendixe A.1.2 dokazujeme, že log-linearizáciou predošlej rovnice okolo ustáleného stavu premennej  $S_{i,t}$  v podobe  $S_i = 1$  pre  $\forall i$  obdržíme:

$$s_t = p_{F,t} - p_{H,t} = \int_0^1 s_{i,t} di. \quad (1.22)$$

V tej istej časti apendixu je ukázaná log-linearizácia domáceho indexu CPI (rovnica 1.12) okolo ustáleného stavu nulovej inflácie<sup>11</sup>:

$$\begin{aligned} p_t &= (1 - \alpha)p_{H,t} + \alpha p_{F,t} \\ &= p_{H,t} + \alpha s_t \end{aligned} \quad (1.23)$$

## Inflácie

*Hrubá miera inflácie* je všeobecne definovaná ako podiel súčasnej a minulej cenovej hladiny, t. j.  $\Pi_t \equiv \frac{P_t}{P_{t-1}}$ . Na základe tejto definície a faktu, že v ustálenom stave platí  $P_t = P_{t-1}$ , odvodzujeme v apendixe v časti A.1.3 nasledujúce rovnice:

- CPI inflácia domácich spotrebiteľov:

$$\pi_t = p_t - p_{t-1}$$

- PPI inflácia domácich výrobcov:

$$\pi_{H,t} = p_{H,t} - p_{H,t-1}$$

- vzťah plynúci z 1.23 medzi  $\pi_t$  a  $\pi_{H,t}$ :

$$\pi_t = \pi_{H,t} + \alpha \Delta s_t, \quad (1.24)$$

kde  $\Delta s_t = s_t - s_{t-1}$

Z rovnice 1.24 môžeme usudzovať, že medzera medzi infláciou spotrebiteľov a výrobcov je proporcionálna zmene v efektívnej výmennej relácii s koeficientom proporcionality, ktorý je daný indexom otvorenosti domácej ekonomiky.

<sup>11</sup>dá sa dokázať, že pri hodnote parametrov  $\omega = 1$  a  $\zeta = 1$  platia vzťahy 1.22 a 1.23 presne a nie len aproximatívne

### Zákon jednej ceny (LOOP)

Za predpokladu platnosti *LOOP* platí intuitívne vzťah:

$$P_{i,t}(k) = \Xi_t^i P_{i,t}^i(k) \quad \forall k, i,$$

čiže cena statku firmy  $k$  importovaného z krajiny  $i$  denominovaná v mene domácej krajiny je rovná cene toho istého statku v mene krajiny  $i$ , ktorá je násobená výmenným kurzom medzi  $i$ -tou a domácou krajinou. Agregáciou cez všetky firmy  $k$ , resp. dosadením do rovnice 1.14, dostaneme<sup>12</sup>:

$$P_{i,t} = \left[ \int_0^1 (\Xi_t^i P_{i,t}^i(k))^{1-\varepsilon} dk \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = \Xi_t^i \left[ \int_0^1 P_{i,t}^i(k)^{1-\varepsilon} dk \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = \Xi_t^i P_{i,t}^i \quad \forall i,$$

kde sa rovnica interpretuje rovnako ako tá minulá, len nejde o jednotlivé ceny firiem, ale o cenové indexy krajín. Agregáciou cez všetky krajiny  $i$ , resp. dosadením do rovnice 1.15, získame:

$$P_{F,t} = \left[ \int_0^1 (\Xi_t^i P_{i,t}^i)^{1-\zeta} di \right]^{\frac{1}{1-\zeta}} \quad (1.25)$$

a opäť v apendixe v časti A.1.2 ukazujeme, že log-linearizovaním 1.25 okolo ustáleného stavu dostaneme:

$$p_{F,t} = \int_0^1 (p_{i,t}^i + e_t^i) di \equiv p_t^* + e_t, \quad (1.26)$$

kde  $p_t^* \equiv \int_0^1 p_{i,t}^i di$  je log-linearizovaný svetový cenový index<sup>13</sup> a  $e_t \equiv \int_0^1 e_t^i di$  je log-linearizovaný nominálny efektívny výmenný kurz. Kombinovaním tejto rovnice s definíciou výmennej relácie 1.22 dostaneme nasledujúci vzťah:

$$s_t = p_{F,t} - p_{H,t} = p_t^* + e_t - p_{H,t}. \quad (1.27)$$

Rovnako za platnosti LOOP, identických preferencií a predpokladu neexistencie tzv. *home bias*<sup>14</sup> platí:

$$\begin{aligned} P_{F,t} &= \Xi_t P_{F,t}^* \\ P_{H,t} &= \Xi_t P_{H,t}^* \\ P_t &= \Xi_t P_t^*, \end{aligned}$$

kde  $P_{F,t}^*$  je zahraničné PPI v zahraničnej mene,  $P_{H,t}^*$  je domáce PPI v zahraničnej mene,  $P_t$  je svetové PPI v domácej mene a  $\Xi_t$  je nominálny efektívny výmenný kurz.

### 1.1.3 Medzinárodné rozdelenie rizika a nekrytá úroková parita (UIP)

Za predpokladu úplnosti trhov s cennými papiermi sú hrubé nominálne výnosy v jednotlivých krajinách rovnaké. Ak sú ešte navyše podmienky prvého stupňa pre všetky zahraničné krajiny identické ako pre domácu krajinu, pre každý čas  $t$  platí:

$$C_t = \varkappa_i C_t^i \Upsilon_{i,t} \quad \forall t, \quad (1.28)$$

<sup>12</sup>využívame fakt, že  $\Xi_t^i$  nezávisí na  $k$

<sup>13</sup>je irelevantné či ide o CPI alebo PPI index, pretože každá krajina je veľkosti objemu nula

<sup>14</sup>prírodná tendencia investorov uprednostňovať investície do domácich aktív

kde máme  $C_t^i$  v pozícii spotrebiteľského indexu  $i$ -tej krajiny a je definovaný rovnako ako domáci index z rovnice 1.8. Ďalej sa v rovnici nachádza efektívny vzájomný reálny výmenný kurz  $\Upsilon_{i,t} \equiv \frac{\Xi_t^i p_t^i}{P_t}$  a konštanta  $\varkappa_i$  závislá na počiatočných podmienkach<sup>15</sup>. V časti A.1.2 appendixu log-linearizujeme a upravujeme rovnicu 1.28 do tvaru:

$$c_t = \int_0^1 c_t^i di + \int_0^1 e_t^i di + \int_0^1 p_t^i di - p_t \equiv c_t^* + e_t + p_t^* - p_t$$

a po kombinovaní tejto rovnice s rovnicami 1.27 a 1.23 získame:

$$\begin{aligned} c_t &= c_t^* + e_t + p_t^* - p_t = c_t^* + s_t + p_{H,t} - p_t \\ &= c_t^* + s_t - \alpha s_t = c_t^* + (1 - \alpha)s_t \end{aligned} \quad (1.29)$$

Zamerajme sa teraz na jednu z kľúčových nearbitrážnych podmienok na trhu dlhopisov a tou je *nekrytá úroková parita* (UIP). Jej vysvetlenie pekne ilustruje Wickens (2012) [28]. Investor sa stále rozhoduje, či investuje do domáceho alebo zahraničného dlhopisu. Aby sme vedeli porovnať výnosy z týchto dvoch investícií, musíme ich mať v rovnakej mene. Predpokladajme, že domáci (napr. český) investor má k dispozícii  $X$  jednotiek domácej meny (CZK), aby ich investoval do zahraničných dlhopisov (denominovaných v EURách). Ako prvé musí vymeniť CZK za EURá pomocou spotového výmenného kurzu  $\Xi_t^i$ , následne ich investuje do dlhopisov a po jednom období vymení EURá aj s úrokmi späť na CZK. Mechanizmus znázorňujeme schémou:

$$X \text{ CZK} \xrightarrow{\text{CZK} \rightarrow \text{€}} \frac{X}{\Xi_t^i} \text{ €} \xrightarrow{\text{úročenie}} \frac{X}{\Xi_t^i} (1 + r_t^i) \text{ €} \xrightarrow{\text{€} \rightarrow \text{CZK}} X \frac{\Xi_{t+1}^i}{\Xi_t^i} (1 + r_t^i) \text{ CZK.}$$

Výnos z takejto investície musí byť za neexistencie arbitráže ekvivalentný výnosu z investície do domácich dlhopisov, čiže:

$$X(1 + r_t) \text{ CZK.}$$

To znamená, že v našom modeli dostávame podmienku UIP (vzhľadom k zahraničnej krajine  $i$ ) v podobe:

$$E_t \left\{ F_{t,t+1} \left[ (1 + r_t) - (1 + r_t^i) \frac{\Xi_{t+1}^i}{\Xi_t^i} \right] \right\} = 0.$$

Už skôr sme definovali (v log-linearizovanej podobe) nominálny efektívny výmenný kurz  $e_t \equiv \int_0^1 e_t^i di$ . Podobne pre netransformovaný kurz dostávame agregát  $\Xi_t \equiv \int_0^1 \Xi_t^i di$ . Predošlú rovnicu zintegrujeme, resp. zregregujeme cez všetky krajiny  $i$  a obdržíme *podmienku UIP* (vzhľadom k zahraničiu ako celku):

$$E_t \left\{ F_{t,t+1} \left[ (1 + r_t) - (1 + r_t^*) \frac{\Xi_{t+1}}{\Xi_t} \right] \right\} = 0, \quad (1.30)$$

pričom sme už v rovnici použili úrokovú sadzbu  $r_t^*$  pre zvyšok sveta v podobe  $\int_0^1 (1 + r_t^i) di \equiv (1 + r_t^*)$ . log-linearizáciou získame vzťah (viď apendix časť A.1.2):

$$r_t - r_t^* = E_t \{ \Delta e_{t+1} \} + \iota_t, \quad (1.31)$$

kam sme navyše ešte doplnili šok v rizikovej prémii<sup>16</sup>. Kombinovaním tejto rovnice s rovnicou 1.27 v čase  $t$  a  $t + 1$  získame:

$$\begin{aligned} E_t \{ s_{t+1} \} - s_t &= E_t \{ p_{t+1}^* \} - p_t^* + E_t \{ e_{t+1} \} - e_t - \iota_t - E_t \{ p_{H,t+1} \} + p_{H,t} \\ s_t &= E_t \{ s_{t+1} \} + (r_t^* - E_t \{ \pi_{t+1}^* \}) - (r_t - E_t \{ \pi_{H,t+1} \}) + \iota_t. \end{aligned} \quad (1.32)$$

<sup>15</sup>bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať symetrické počiatočné podmienky  $\varkappa_i = \varkappa = 1$ , z ktorých plynú nulové čisté zahraničné aktíva

<sup>16</sup>preklad z angl. *risk premium shock*

Z podmienky UIP tiež pre náš model vyplýva vzťah pre očakávanú hodnotu stochastického diskontného faktoru v tvare:

$$E_t \{F_{t+1}\} = \frac{1}{1+r_t}. \quad (1.33)$$

V kombinácii s Eulerovou rovnicou 1.6 dostaneme typickejšie prepojenie spotreby s úrokovou sadzbou:

$$\frac{1}{1+r_t} = \beta E_t \left\{ \frac{P_t C_t(j)}{P_{t+1} C_{t+1}(j)} \right\}. \quad (1.34)$$

Ďalej obmedzíme model tzv. *no-Ponzi* podmienkou:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_t \left\{ F_{t,t+k} (1-\gamma)^k \Omega_{t+k}(j) \right\} = 0, \quad (1.35)$$

ktorá hovorí, že súčasná hodnota (diskontovaná pomocou  $F_{t,t+k}$ ) nominálneho finančného bohatstva jedinca z domácej skupiny  $j$ , podmienená jeho prežitím, konverguje k nule.

Kombinovaním rovnice 1.1 s optimálnou podmienkou 1.7 modifikujeme rozpočtové obmedzenie 1.3 do tvaru stochastickej diferencnej rovnice vzhľadom ku nominálnemu finančnému bohatstvu (viď appendix A.1.4):

$$P_t C_t(j) + E_t \{F_{t,t+1} (1-\gamma) \Omega_{t+1}(j)\} = W_t N_t(j) - P_t T_t(j) + \Omega_t(j). \quad (1.36)$$

Eulerovu rovnicu 1.6 je možné iterovať vpred týmto spôsobom<sup>17</sup>:

$$\begin{aligned} & E_t \{F_{t,t+1}\} \cdot \dots \cdot E_t \{F_{t+k-2,t+k-1}\} \cdot E_t \{F_{t+k-1,t+k}\} = \\ & = \beta E_t \left\{ \frac{P_t C_t(j)}{P_{t+1} C_{t+1}(j)} \right\} \cdot \dots \cdot \beta E_t \left\{ \frac{P_{t+k-2} C_{t+k-2}(j)}{P_{t+k-1} C_{t+k-1}(j)} \right\} \cdot \beta E_t \left\{ \frac{P_{t+k-1} C_{t+k-1}(j)}{P_{t+k} C_{t+k}(j)} \right\} \end{aligned}$$

a získať tvar

$$E_t \{F_{t,t+k}\} = \prod_{i=0}^{k-1} E_t \{F_{t+i,t+i+1}\} = \beta^k E_t \left\{ \frac{P_t C_t(j)}{P_{t+k} C_{t+k}(j)} \right\}, \quad (1.37)$$

pričom pri prvej rovnosti je využitá nezávislosť diskontného faktoru naprieč obdobiami. Na záver tejto časti ešte odkazujeme na appendix A.1.5, kde je uvedený postup, ako sme na základe práce Piergallini (2006) [25] pomocou definície ľudského bohatstva 1.4, *no-Ponzi* podmienky 1.35 a rovníc 1.36, 1.37 odvodili rovnicu:

$$P_t C_t(j) = [1 - \beta(1-\gamma)] (\Omega_t(j) + H_t(j)), \quad (1.38)$$

kde  $1 - \beta(1-\gamma)$  je sklon ku spotrebe z finančného a ľudského bohatstva. Napríklad nízka hodnota diskontného faktoru  $\beta$  (t. j. stav, kedy je súčasná spotreba oveľa cennejšia ako tie budúce) znamená, že sklon bude vysoký a väčšina bohatstva sa spotrebuje v súčasnosti.

#### 1.1.4 Agregácia naprieč skupinami

V tejto časti budeme agregovať vybrané premenné naprieč kohortami  $j$ . Pomôžeme si váženým priemerom s váhami, ktoré sú dané veľkosťou kohorty:

$$X_t \equiv \sum_{j=-\infty}^t n_t(j) X_t(j) = \sum_{j=-\infty}^t \gamma(1-\gamma)^{t-j} X_t(j).$$

Kvôli linearite všetkých agregovaných premenných bude proces jednoduchý – funkčný tvar rovníc zostane zachovaný, len „zmažeme“ zátvorky s indexmi  $j$ .

<sup>17</sup>členy na pravej strane rovnice sa vykrátia

### Agregácia spotreby

Na základe predchádzajúcej definície získavame nasledujúce agregáty optimálnej alokácie domácností:

- rovnica 1.16:

$$C_{H,t} = (1 - \alpha) \left[ \frac{P_{H,t}}{P_t} \right]^{-\omega} C_t \quad (1.39)$$

- rovnica 1.17:

$$C_{F,t} = \alpha \left[ \frac{P_{F,t}}{P_t} \right]^{-\omega} C_t \quad (1.40)$$

- rovnica 1.18:

$$C_{i,t} = \left[ \frac{P_{i,t}}{P_{F,t}} \right]^{-\zeta} C_{F,t} \quad (1.41)$$

kde  $C_t$  môže byť vyjadrené z 1.8:

$$C_t \equiv \left[ (1 - \alpha)^{\frac{1}{\omega}} C_{H,t}^{\frac{\omega-1}{\omega}} + \alpha^{\frac{1}{\omega}} C_{F,t}^{\frac{\omega-1}{\omega}} \right]^{\frac{\omega}{\omega-1}}. \quad (1.42)$$

### Agregácia ďalších potrebných rovníc

Pre ďalšie účely budeme ešte potrebovať agregovať niektoré rovnice odvodené v predošlých častiach. Konkrétnejšie:

- rovnica 1.5:

$$\frac{C_t}{1 - N_t} = \frac{W_t}{P_t} \quad (1.43)$$

- rovnica 1.4:

$$H_t = E_t \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} F_{t,t+k} (1 - \gamma)^k (W_{t+k} N_{t+k} - P_{t+k} T_{t+k}) \right\} \quad (1.44)$$

- rovnica 1.36:

$$P_t C_t + E_t \{ F_{t,t+1} \Omega_{t+1} \} = W_t N_t - P_t T_t + \Omega_t \quad (1.45)$$

- rovnica 1.38:

$$P_t C_t = [1 - \beta(1 - \gamma)] (\Omega_t + H_t) \quad (1.46)$$

kde

$$\Omega_t \equiv \left[ B_t + \int_0^1 \Xi_t^i B_t^i di + \int_0^1 (Q_t(k) + D_t(k)) Z_t(k) dk \right].$$

Všimnite si, že sme v rovnici ignorovali pravdepodobnosť úmrtia. Je to preto, lebo agregovaná hodnota výnosu z poistného je rovná jednej – bohatstvo sa nevytvára, len ho prerozdeľujeme.

Pomocou článku Nisticó (2005) [24] sa nám podarilo v apendixe A.1.6 ukázať, že kombinovaním a úpravami rovníc 1.45, 1.46 a 1.44 dostaneme rovnicu:

$$\beta P_t C_t = [1 - \beta(1 - \gamma)] \frac{\gamma}{1 - \gamma} E_t \{F_{t,t+1} \Omega_{t+1}\} + E_t \{F_{t,t+1} P_{t+1} C_{t+1}\}. \quad (1.47)$$

Ide o dynamickú rovnicu agregovanej spotreby, kde efekt finančného bohatstva klesá úmerne s poklesom pravdepodobnosti  $\gamma$ .

## 1.2 Firmy

Rolu druhého agenta modelu zastupujú firmy. Uvažujeme dvojstupňovú výrobu – producentov medziproduktov a producentov finálnych statkov.

Producentov medziproduktov tvorí veľkoobchodný (*wholesale*) sektor. Ich výstup tvoria produkty určené k ďalšej výrobnej činnosti a vydávajú akcie (resp. majetkové podiely).

Za producentov finálnych statkov pokladáme maloobchodný (*retail*) sektor, kde firma používa ako vstup práve medziprodukty veľkoobchodného sektoru a vyrába z neho finálny diferencovateľný produkt  $k$ . Retailové firmy pôsobia na monopolisticky konkurenčnom trhu a používajú CES technológiu.

V ďalších častiach objasníme ich racionálne rozhodovanie sa. Zameriame sa na domáce firmy, ale analogicky by vyzeral postup aj pre zahraničie.

### 1.2.1 Technológia

Produkčná funkcia firmy  $k$  je lineárna v tvare:

$$Y_t(k) = A_t N_t(k), \quad (1.48)$$

kde  $Y_t(k)$  je výstup danej firmy,  $N_t(k)$  je výrobný faktor – práca a  $a_t \equiv \ln A_t$  predstavuje exogénny šok v produktivite. Ako už býva zvykom v jednoduchších Novokeynesiánskych modeloch, budeme abstrahovať od kapitálu a tým pádom aj od dopytu po investičných statkoch. Viac sa zaoberajú touto problematikou napr. Clarida et al. (1999) [7].

Domácnosti sa rozhodujú, ako budú svoje príjmy alokovať medzi statky rôznych firiem. Galí (2008) [14] ukazuje v apendixe svojej práce, že snaha maximalizovať spotrebu domácich statkov (u nás ide o rovnicu 1.9) pri výdajovom obmedzení v podobe:

$$\int_0^1 P_{H,t}(k) C_{H,t}(k) dk$$

vedie k tzv. dopytu po špecifickej značke domácej firmy  $k$  v tvare<sup>18</sup>:

$$C_{H,t}(k) = \left( \frac{P_{H,t}(k)}{P_{H,t}} \right)^{-\varepsilon} C_{H,t}. \quad (1.49)$$

<sup>18</sup>uvádzame už zagregované naprieč skupinami

Rovnakým spôsobom by bolo možné odvodiť dopyt po špecifickej značke zahraničnej firmy pomocou rovnice 1.10. Nakoľko definujeme agregovaný výstup tiež ako CES funkciu:

$$Y_t \equiv \left[ \int_0^1 Y_t(k)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} dk \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}, \quad (1.50)$$

tak to čo platí pre spotrebu, platí aj pre výstup, t. j. :

$$Y_t(k) = \left( \frac{P_{H,t}(k)}{P_{H,t}} \right)^{-\varepsilon} Y_t. \quad (1.51)$$

Následne agregujeme produkčnú funkciu 1.48 naprieč firmami a postupne upravujeme:

$$\begin{aligned} \int_0^1 Y_t(k) dk &= \int_0^1 A_t N_t(k) dk \\ Y_t \int_0^1 \frac{Y_t(k)}{Y_t} dk &= A_t \int_0^1 N_t(k) dk \\ Y_t \int_0^1 \left( \frac{P_{H,t}(k)}{P_{H,t}} \right)^{-\varepsilon} dk &= A_t \int_0^1 N_t(k) dk \\ Y_t V_t &= A_t N_t, \end{aligned} \quad (1.52)$$

kde sme použili predošlý vzťah 1.51, ponuku práce<sup>19</sup>  $N_t = \int_0^1 N_t(k) dk$  a substitúciu v tvare  $V_t \equiv \int_0^1 \left( \frac{P_{H,t}(k)}{P_{H,t}} \right)^{-\varepsilon} dk$ . Pomocou  $V_t$  vieme merať relatívnu cenovú disperziu medzi domácimi firmami. Log-linearizovaný tvar tejto rovnice je triviálny v tvare<sup>20</sup>:

$$y_t = a_t + n_t. \quad (1.53)$$

Firmy volia množstvo ponúkanej práce so zámerom minimalizovať reálne náklady definované ako:

$$TC_t \equiv \frac{W_t}{P_{H,t}} N_t(k) = \frac{W_t}{P_{H,t}} \frac{Y_t(k)}{A_t}.$$

Výsledkom minimalizácie (podmienka prvého stupňa vzhľadom k výstupu) je rovnica:

$$MC_t = (1 - \vartheta) \frac{W_t}{P_{H,t} A_t} \exp(\mu_t^P), \quad (1.54)$$

kde  $MC_t$  sú *reálne medzné náklady* totožné pre všetky firmy. Do vzťahu sme ešte pridali parameter  $\vartheta$  označujúci optimálne dotácie volené vládou a nákladový šok  $\mu_t^P$ . Aj log-linearácia tohto výrazu je zrejme v tvare:

$$mc_t = w_t - p_{H,t} - a_t + \mu_t^P. \quad (1.55)$$

## 1.2.2 Voľba ceny

Táto časť sa priamo opiera o článok Galí, Gerler (1999) [15], kde sa autori na ekonomike USA pokúsili o popis inflačnej dynamiky, z ktorej sa odvodzuje *Novokeynesiánska Phillipsova krivka* (ďalej

<sup>19</sup>agregát množstva odpracovaných hodín na hlavu

<sup>20</sup>na základe práce Galí (2008) [14] môžeme člen  $v_t = \ln \left( \int_0^1 \left( \frac{P_{H,t}(k)}{P_{H,t}} \right)^{-\varepsilon} dk \right)$  ignorovať, lebo aproximácia  $V_t$  pomocou Taylorovho rozvoja 1. stupňa okolo ustáleného stavu nulovej inflácie je rovná nule

len NKPC). My použijeme jej rozšírenú *hybridnú verziu*, ktorá bude obohatená o rozhodovanie vzad–hľadiacich firiem.

Predpoklad strnulých cien znamená, že nie všetky firmy volia optimálnu cenu každé jedno obdobie, pretože čelia nákladom na jej úpravu (tzv. nákladom jedálnička a mnohým ďalším). Tradičný Calvov prístup [4] teda rozdeľuje firmy na dve skupiny:

- neoptimalizujúce cenu – ide o  $\theta$  percent, ktoré ponechajú cenu rovnakú ako v minulom období
- optimalizujúce cenu – ide o  $1 - \theta$  percent firiem, ktoré svoju cenu zmenia na optimálnu

Parameter  $\theta$  býva označovaný aj ako *Calvo parameter* strnulosti cien. V apendixe A.2.1 ponúkame dôkaz, že priemerná *dĺžka kontraktu* je  $\frac{1}{1-\theta}$ . Autori však ešte v originálnej verzii článku rozdelili optimalizujúce firmy do dvoch skupín:

- *vpred–hľadiacé*<sup>21</sup> alebo *ex–ante*: je ich  $1 - \tau$  a nastavujú ceny optimálne vzhľadom k budúcnosti za použitia všetkých dostupných informácií
- *vzad–hľadiacé*<sup>22</sup> alebo *ex–post*: je ich  $\tau$  a používajú jednoduchý koncept *rule–of–thumb* založený na nedávnej minulosti

Agregovaná cenová hladina (už v log–linearizovanom tvare) vyzerá nasledovne:

$$p_{H,t} = \theta p_{H,t-1} + (1 - \theta) \bar{p}_{H,t}, \quad (1.56)$$

pretože  $\theta$  firiem cenu nemení a  $1 - \theta$  ju mení na optimálnu  $\bar{p}_{H,t}$ . Keďže uvažujeme *ex–ante* aj *ex–post* firmy, optimálna cena bude váženým priemerom ich optimálnych cien, kde váhy určuje podiel firiem z ich celkového počtu:

$$\bar{p}_{H,t} = (1 - \tau) p_{H,t}^{FL} + \tau p_{H,t}^{BL}. \quad (1.57)$$

Ďalej ukážeme konkrétne tvary  $p_{H,t}^{FL}$  a  $p_{H,t}^{BL}$ .

### Vpred–hľadiacie firmy

Vpred–hľadiacia firma volí optimálnu cenu  $P_{H,t}(k)$ , aby maximalizovala ziskovú funkciu:

$$E_t \sum_{i=0}^{\infty} \theta^i F_{t,t+i} [P_{H,t}(k) Y_{t+i}(k) - P_{H,t+i} MC_{t+i} Y_{t+i}(k)]$$

za dopytového obmedzenia

$$Y_{t+i}(k) \leq \frac{P_{H,t}(k)^{-\varepsilon}}{P_{H,t+i}} (C_{H,t+i} + C_{H,t+i}^*).$$

Apendix pôvodného článku obsahuje maximalizáciu ziskovej funkcie a jej log–linearizáciu okolo ustáleného stavu nulovej inflácie. Výsledkom je rovnica:

$$p_{H,t}^{FL} = (1 - \beta\theta) \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\theta)^i E_t \{mc_{t+i} + p_{H,t+i}\}, \quad (1.58)$$

kde  $mc = -\ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}$ .

<sup>21</sup>preklad z angl. *forward–looking*

<sup>22</sup>preklad z angl. *backward–looking*

## Vzad–hľadacie firmy

Vzad–hľadacia firma používa „rule–of–thumb“ dané rovnicou:

$$p_{H,t}^{BL} = \bar{p}_{H,t-1} + \pi_{H,t-1}. \quad (1.59)$$

Ide o celkovú optimálnu cenu z minulého obdobia korigovanú o infláciu minulého obdobia.

## 1.3 Rovnováha

Jednou z výhod popisovaného modelu je jeho jednoduchosť a intuitívna povaha výsledkov. Tým, že model môže byť vyriešený pre nekonečný počet ustálených stavov, kladieme obmedzenia na počítačnú rovnováhu s odvolávaním sa na prácu Funke, Paetz a Pytlarczyk (2011) [13]. Bez ujmy na všeobecnosti pracujeme so symetrickým ustáleným stavom, ktorý okrem iného implikuje konštantnú spotrebu rovnakú pre všetky ekonomiky a reálny výmenný kurz na úrovni jedna. V spojení s PPP dostávame ustálenú hodnotu ToT tiež rovnú jednej. Opäť zdôrazňujeme, že malými písmenami sú označované percentuálne odchýlky od rovnovážnych stavov označovaných veľkými písmenami bez indexov času.

V nasledujúcich častiach sa bližšie pozrieme na stranu dopytu a stranu ponuky v ekonomike.

### 1.3.1 Strana dopytu

Stranu dopytu (po spotrebe) ekonomiky zastupujú v našom modeli domácnosti podrobne rozoberané v časti 1.1. Svojím spôsobom ide o diskretnú stochastickú verziu modelu večnej mladosti, ktorej základy položili vo svojich článkoch Blanchard (1985) [2] a Yaari (1965) [29].

Podmienka vyčistenia domáceho trhu ako malej otvorenej krajiny vyžaduje rovnosť:

$$Y_t(k) = C_{H,t}(k) + \int_0^1 C_{H,t}^i(k) di, \quad (1.60)$$

ktorá znamená, že výstup domácej krajiny sa prerozdelení medzi domácu spotrebu a export ( $C_{H,t}^i(k)$  nám v rovnici vyjadruje dopyt krajiny  $i$  po domácom statku  $k$  – ich import a zároveň náš export). Priamym dosadením rovnice dopytu po domácich statkoch 1.39 do rovnice dopytu po špecifickej značke 1.49 získame:

$$C_{H,t}(k) = (1 - \alpha) \left( \frac{P_{H,t}(k)}{P_{H,t}} \right)^{-\varepsilon} \left( \frac{P_{H,t}}{P_t} \right)^{-\omega} C_t.$$

Pre nasledujúce odvodenie použijeme predpoklad symetrických preferencií naprieč krajinami, t. zn. všetky krajiny majú rovnaké dopytové funkcie tvaru:

$$C_{H,t}^i(k) = \alpha \left( \frac{P_{H,t}(k)}{P_{H,t}^i} \right)^{-\varepsilon} \left( \frac{P_{H,t}}{\Xi_t^i P_{F,t}^i} \right)^{-\zeta} \left( \frac{P_{F,t}^i}{P_t^i} \right)^{-\omega} C_t^i,$$

kde  $P_{H,t}^i$  znamená PPI statkov vyrobených v krajine  $i$  a  $P_{F,t}^i$  je PPI importovaných statkov krajiny  $i$ . Predchádzajúce dve rovnice dosadíme do 1.60 a dostaneme:

$$Y_t(k) = \left( \frac{P_{H,t}(k)}{P_{H,t}} \right)^{-\varepsilon} \left[ (1-\alpha) \left( \frac{P_{H,t}}{P_t} \right)^{-\omega} C_t + \alpha \int_0^1 \left( \frac{P_{H,t}}{\Xi_t^i P_{F,t}^i} \right)^{-\zeta} \left( \frac{P_{F,t}^i}{P_t^i} \right)^{-\omega} C_t^i di \right], \quad (1.61)$$

pretože  $\int_0^1 P_{H,t}^i di \equiv P_{H,t}$ . V 7. kapitole práce Galí (2008) [14] je zobrazený postup, akým je možné substitúciou minulého výrazu do rovnice agregovaného výstupu 1.50 dostať rovnicu:

$$Y_t = \left( \frac{P_{H,t}}{P_t} \right)^{-\omega} C_t \left[ (1-\alpha) + \alpha \int_0^1 (S_t^i S_{i,t})^{\zeta-\omega} \Upsilon_{i,t}^{\omega-1} di \right], \quad (1.62)$$

kde bol použitý vzťah 1.28, definícia vzájomných výmenných relácií  $S_{i,t}$  zo vzťahu 1.19 a efektívne výmenné relácie krajiny  $i$ , čiže  $S_t^i$ , definované rovnako ako to domáce (viď vzťah 1.20). Rovnako v práci možno nájsť aj log-linearizovanú podobu okolo symetrického ustáleného tvaru a za využitia  $\int_0^1 s_t^i di = 0$  v tvare:

$$y_t = c_t + \alpha \eta s_t, \quad (1.63)$$

kde  $\eta \equiv \zeta + (1-\alpha)(\omega-1)$ . Totožná podmienka sa vzťahuje pre každú krajinu, t. j. platí:

$$y_t^i = c_t^i + \alpha \eta s_t^i \quad (1.64)$$

a agregáciou cez všetky krajiny dostaneme:

$$y_t^* = \int_0^1 y_t^i di = \int_0^1 c_t^i di + \int_0^1 \alpha \eta s_t^i di = \int_0^1 c_t^i di = c_t^*, \quad (1.65)$$

kde  $y_t^*$  a  $c_t^*$  predstavujú indexy svetového výstupu a spotreby. To znamená, že náš model implikuje rovnovážny stav: „všetko čo sa na svete vyrobí, sa aj spotrebuje“. Využijeme kombináciu tejto rovnováhy s rovnicami 1.63 a 1.29 a upravujeme:

$$\begin{aligned} c_t &= c_t^* + (1-\alpha)s_t \\ y_t - \alpha \eta s_t &= y_t^* + (1-\alpha)s_t \\ y_t &= y_t^* + \frac{s_t}{\nu_\alpha} \end{aligned} \quad (1.66)$$

pri substitúcii  $\nu_\alpha \equiv \frac{1}{(1-\alpha)+\alpha\eta}$ .

Definujme dva dôležité indexy, týkajúce sa finančného trhu ekonomiky:

- priemerná reálna *dividendová platba*:

$$D_t \equiv \frac{1}{P_t} \int_0^1 D_t(k) dk$$

- priemerná reálna kapitalizácia akciového trhu, resp. *cenový index* domácej krajiny:

$$Q_t \equiv \frac{1}{P_t} \int_0^1 Q_t(k) dk$$

Uvedieme ďalšie dve dôležité podmienky:

- v rovnováhe musí byť čistá agregovaná svetová ponuka štátnych dlhopisov rovná nule, t. j.:

$$B_t + \int_0^1 \Xi_t^i B_t^i di = \frac{1}{\Xi_{t+1}^i} B_{t+1}^{(i,H)} + \int_0^1 \Xi_{t+1}^{(i,l)} B_{t+1}^{(i,l)} dl = 0$$

- rovnovážny agregovaný (naprieč skupinami  $j$ ) objem nesplatených akcií každej firmy produkujúcej medzistatky, sa musí rovnať celkovému množstvu vydaných akcií (normovanému na hodnotu 1), t. j.:

$$Z_t(k) = 1 \quad \text{pre } \forall k$$

Použitím podmienok v rovnici 1.46 a využitím intertemporálnej podmienky 1.7 získal Nisticó (2005) [24] rovnicu:

$$E_t \{F_{t,t+1} \Omega_{t+1}\} = \int_0^1 Q_t(k) dk = P_t Q_t, \quad (1.67)$$

pričom ide o rovnosť diskontovanej hodnoty rovnovážneho budúceho agregovaného finančného nominálneho bohatstva a súčasnej hodnoty domáceho nominálneho akciového indexu.

*Obmedzenie dopytovej strany* v našom modeli poskytuje podmienka:

$$D_t = \frac{P_{H,t}}{P_t} Y_t (1 - MC_t) = \frac{P_{H,t}}{P_t} Y_t - (1 - \vartheta) \frac{W_t}{P_t} N_t \exp(\mu_t^p), \quad (1.68)$$

kde druhá rovnosť plynie rovno po dosadení za medzné náklady 1.54 a za výstup z 1.52<sup>23</sup>. Podmienka predpokladá, že celý výstup po odčítaní nákladov posluži na výplatu dividend.

Už sme spomínali, že domáca hrubá miera inflácie je v tvare  $\Pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$ . Použitím tohto faktu a prepojením rovnice 1.67 s rovnicou dynamickej rovnice agregovanej spotreby 1.47 získame Eulerovu rovnicu v tvare:

$$\beta C_t = [1 - \beta(1 - \gamma)] \frac{\gamma}{1 - \gamma} Q_t + E_t \{F_{t,t+1} \Pi_{t+1} C_{t+1}\}, \quad (1.69)$$

ktorá charakterizuje dopytovú stranu domácej ekonomiky. Ďalšou potrebnou rovnicou je:

$$Q_t = E_t \{F_{t,t+1} \Pi_{t+1} [Q_{t+1} + D_{t+1}]\}, \quad (1.70)$$

ktorú získame jednoduchým agregovaním rovnice 1.7 naprieč firmami. Rovnica popisuje dynamiku akciového indexu. Z elementárnych kurzov štatistiky je známy vzťah medzi dvoma náhodnými veličinami:  $E(XY) = E(X)E(Y) + cov(X, Y)$ . Použijeme ho na predošlú rovnicu a dostaneme:

$$Q_t = E_t \{F_{t,t+1}\} E_t \{\Pi_{t+1} [Q_{t+1} + D_{t+1}]\} - Q_t \Lambda, \quad (1.71)$$

kde kladný parameter<sup>24</sup>  $\Lambda$  reprezentuje podmienenú kovarianciu medzi stochastickým diskontným faktorom a nominálnym hrubým výnosom z akcie:

$$\Lambda = -cov \left( F_{t,t+1}, \Pi_{t+1} \frac{Q_{t+1} + D_{t+1}}{Q_t} \right) > 0.$$

<sup>23</sup>je vynechaný člen  $V_t$ , ktorý by po log-linearizovaní aj tak vypadol a jeho ustálený stav je rovný jednej

<sup>24</sup> $\Lambda$  je možné modelovať aj ako v čase premenný parameter – viď Nisticó (2005) [24]

Znamienko – je dané teoretickým predpokladom pozitívneho vzťahu medzi spotrebou a dividendami<sup>25</sup>. Minulá rovnica nám spolu s 1.33 dáva *riziková prémie* v tvare:

$$(1 + r_t)\Lambda = E_t \left\{ \Pi_{t+1} \left[ \frac{Q_{t+1} + D_{t+1}}{Q_t} \right] \right\} - (1 + r_t) \quad (1.72)$$

V apendixe A.3.2 je možné nájsť proces log–linearizácie rovníc dopytovej strany a ďalšie úpravy. Získame rovnice:

- log–lin. Eulerova rovnica 1.69 pri rovnováhe danej 1.63:

$$y_t = \frac{\Psi q_t - r_t + \bar{\rho} + E_t \{ \pi_{H,t+1} \}}{v_\alpha} + E_t \{ y_{t+1} \} + \alpha \Theta E_t \{ \Delta y_{t+1}^* \}, \quad (1.73)$$

kde sme použili substitúcie  $\Psi \equiv [1 - \beta(1 - \gamma)] \frac{\gamma}{1 - \gamma} \frac{\Omega}{\bar{p}C}$  a  $\Theta \equiv \eta - 1$ , ustálený stav  $\frac{\Omega}{\bar{p}C} = \frac{\mu}{[1 + \Lambda - \beta](1 + \mu)^{\frac{1}{\gamma}}}$  a ustálené stavy rovníc 1.67, 1.33, 1.34, rovnosť  $E_t \{ f_{t,t+1} \} = -r_t + \ln(1 + r) \equiv -r_t + \bar{\rho}$  a rovnice 1.24 a 1.66

- log–lin. rovnica rizikovej prémie 1.72:

$$q_t = E_t \{ \pi_{H,t+1} + \alpha \Delta s_{t+1} \} - r_t + \bar{\rho} + \frac{\beta}{1 + \Lambda} E_t \{ q_{t+1} \} + \frac{1 + \Lambda - \beta}{1 + \Lambda} E_t \{ d_{t+1} \}, \quad (1.74)$$

kde sme využili  $\beta = \frac{1}{1+r}$ , vzťah 1.24 a približnú platnosť  $\ln(1 + r_t) - \ln(1 + r) = r_t - \bar{\rho}$

- log–lin. dopytové obmedzenie 1.68:

$$d_t = y_t - \alpha s_t - \frac{MC}{1 - MC} mc_t, \quad (1.75)$$

kde boli použité vzťahy 1.53, 1.55, 1.23 a ustálené stavy viacerých rovníc.

### 1.3.2 Strana ponuky

Stranu ponuky (v zmysle ponuky výrobkov resp. výstupu) tvoria dva druhy firiem, ktorým bola venovaná celá časť 1.2.

Pre nasledujúce potreby uvedieme log–linearizovaný tvar optimálneho rozhodovania sa domácností 1.43 (odvodenie v apendixe A.3.3):

$$c_t + p_t = w_t - \varphi n_t, \quad (1.76)$$

kde  $\varphi \equiv \frac{N}{1-N}$  je inverzia rovnovážnej hodnoty *Frischovej elasticity* v ponuke práce.

*Rovnováha na trhu práce* vzniká prienikom firmami dopytovej práce (z rovnice 1.53) a domácnosťami ponúkanej práce (z rovnice 1.76), t. j.:

$$\begin{aligned} n_t^S &= n_t^D \\ y_t - a_t &= \frac{w_t - c_t - p_t}{\varphi} \\ \varphi y_t - \varphi a_t &= w_t - c_t - p_t \quad | + c_t + p_t - p_{H,t} - a_t + \mu_t^P \\ mc_t &= \varphi y_t - (1 + \varphi) a_t + c_t + p_t - p_{H,t} + \mu_t^P, \end{aligned}$$

<sup>25</sup>ceteris paribus  $\uparrow C_{t+1} \Rightarrow \downarrow F_{t,t+1}$  viď rovnica 1.6, ale zároveň teória tvrdí  $\uparrow C_{t+1} \Rightarrow \uparrow D_{t+1}$ , a to implikuje  $\uparrow D_{t+1} \Rightarrow \uparrow \Pi_{t+1} \frac{Q_{t+1} + D_{t+1}}{Q_t}$

kde sme v poslednom kroku využili medzné náklady firiem dané rovnicou 1.55. Ďalej z rovnice 1.29 dosadíme za  $c_t$  a použijeme rovnováhu danú  $y_t^* = c_t^*$  (viď 1.65) a získame:

$$mc_t = \varphi y_t - (1 + \varphi)a_t + y_t^* + s_t + \mu_t^p.$$

Posledná úprava spočíva v eliminácii člena  $s_t$  pomocou rovnice 1.66:

$$mc_t = (1 - v_\alpha)y_t^* + (\varphi + v_\alpha)y_t - (1 + \varphi)a_t + \mu_t^p. \quad (1.77)$$

V rovnovážnom stave pri flexibilných cenách ( $\theta \rightarrow 0$ ) stanovujú všetky firmy svoje ceny ako konštantnú prirážku nad medzné náklady. Za takýchto okolností majú medzné náklady nulové tempo rastu a nákladový šok bude nulový, čiže  $mc_t^n = 0$ . Dostaneme rovnicu:

$$mc_t^n = 0 = (1 - v_\alpha)y_t^* + (\varphi + v_\alpha)y_t^n - (1 + \varphi)a_t. \quad (1.78)$$

Prirodzenú úroveň výstupu  $y_t^n$  dokážeme vypočítať priamo z minulej rovnice (ide len o algebraické úpravy):

$$y_t^n = \Gamma_a a_t - \alpha \Gamma_* y_t^*, \quad (1.79)$$

kde  $\Gamma_a \equiv \frac{1+\varphi}{v_\alpha+\varphi}$ ,  $\Gamma_* \equiv \frac{v_\alpha\Theta}{v_\alpha+\varphi}$  a  $\Theta \equiv (\zeta - 1) + (1 - \alpha)(\omega - 1) = \eta - 1$ . Odčítaním rovníc medzných nákladov pri strnulých cenách 1.77 a flexibilných cenách 1.78 získame:

$$mc_t = (\varphi + v_\alpha)\tilde{y}_t + \mu_t^p, \quad (1.80)$$

kde  $\tilde{y}_t \equiv y_t - y_t^n$  je definícia medzery výstupu. Týmto vzťahom sme získali priame prepojenie medzi medznými nákladmi a medzerou výstupu.

Vráťme sa naspäť k inflačnej dynamike spomínanej v časti 1.2.2. V apendixe A.3.4 je uvedený postup, ako sa dá kombináciou rovníc 1.56, 1.57, 1.58 a 1.59 (ide o rovnice optimálneho rozhodovania sa firmami) získať hybridná PC v tvare:

$$\pi_{H,t} = \lambda mc_t + \gamma_f E_t \{ \pi_{H,t+1} \} + \gamma_b \pi_{H,t-1}, \quad (1.81)$$

kde

$$\begin{aligned} \lambda &\equiv (1 - \tau)(1 - \theta)(1 - \beta\theta)\phi^{-1} \\ \gamma_f &\equiv \beta\theta\phi^{-1} \\ \gamma_b &\equiv \tau\phi^{-1} \\ \phi &\equiv \theta + \tau[1 - \theta(1 - \beta)]. \end{aligned} \quad (1.82)$$

V ďalšej časti ukážeme jej kanonický tvar za použitia medzery výstupu.

## 1.4 Kanonická reprezentácia modelu

Dostávame sa k odvodeniu najdôležitejších rovníc. Tieto rovnice spolu s niektorými vyššie zmieňovanými tvoria teoretický koncept popisujúci malú otvorenú ekonomiku. Zoznam rovníc vstupujúci do odhadu je zhrnutý v apendixe v časti A.5.

### 1.4.1 Novokeynesiánska Phillipsova krivka

Použitím rovnice 1.80 v rovnici 1.81 obdržíme kanonický tvar *hybridnej NKPC* v tvare:

$$\pi_{H,t} = \kappa_\alpha \tilde{y}_t + \gamma_f E_t \{ \pi_{H,t+1} \} + \gamma_b \pi_{H,t-1} + \varepsilon_t^p, \quad (1.83)$$

kde  $\kappa_\alpha \equiv \lambda(\varphi + v_\alpha)$  a  $\varepsilon_t^p \equiv \lambda \mu_t^p$ .

### 1.4.2 Dynamická IS krivka

Nie menej dôležitou rovnicou je tzv. *dynamická IS krivka*. Jej odvodenie nie je zložité, no napriek tomu ho uvádzame v apendixe A.4.1 Vznikne vyjadrením Eulerovej rovnice 1.73 pomocou medzery výstupu  $\tilde{y}_t = y_t - y_t^n$  a prirodzenej úrovne výstupu 1.79. Dostaneme:

$$\tilde{y}_t = E_t \{ \tilde{y}_{t+1} \} + \frac{\Psi q_t}{v_\alpha} - \frac{r_t - E_t \{ \pi_{H,t+1} \} - r_t^n}{v_\alpha}, \quad (1.84)$$

kde

$$r_t^n \equiv \bar{\rho} + v_\alpha \Gamma_a E_t \{ \Delta a_{t+1} \} + \alpha \varphi \Gamma_* E_t \{ \Delta y_{t+1}^* \} \quad (1.85)$$

je prirodzená úroková miera malej otvorenej ekonomiky.

### 1.4.3 Rovnica akciového indexu

Poslednou rovnicou nášho redukovaného systému bude *dynamická rovnica* popisujúca vývoj *reálneho akciového indexu*. Najprv definujme na základe článku Galí (2008) [14] *hrubú požadovanú prirážku* nad medzné náklady ako  $\mu^G \equiv MC^{-1}$ . Medzi hrubou a čistou prirážkou je vzťah  $\mu^G \equiv \mu + 1$ , t. zn. pre *čistú prirážku* platí:

$$\mu = \frac{1 - MC}{MC} = \frac{1}{\varepsilon - 1}.$$

Apendix A.4.2 ponúka odvodenie rovnice dynamického vývoja akciového indexu v tvare:

$$\tilde{q}_t = \frac{\beta}{1 + \Lambda} E_t \{ \tilde{q}_{t+1} \} - (r_t - r_t^n - E_t \{ \pi_{H,t+1} \}) + \frac{\lambda_q}{1 + \Lambda} E_t \{ \tilde{y}_{t+1} \} + \chi_t, \quad (1.86)$$

pričom  $\tilde{q}_t = q_t - q_t^n$  ( $q_t^n$  je prirodzená cena akciového indexu, resp. jeho cena pri flexibilných cenách) a  $\lambda_q \equiv (1 + \Lambda - \beta) \left( 1 - \frac{\varphi + v_\alpha}{\mu} \right)$ . Pridaním nefundamentálneho šoku  $\chi_t$  chceme zachytiť zvyšné šoky nemajúce v modeli žiaden štruktúrny význam.

### 1.4.4 Monetárna politika

Menová politika bude spĺňať rolu tretieho reprezentatívneho agenta nášho modelu. Modelovať a analyzovať budeme dva monetárne režimy centrálnej banky, oba s cieľom stabilnej inflácie.

Prvým bude inflačné cieľovanie pomocou referenčných úrokových sadzieb, k čomu nám pomôže Taylorove pravidlo zamerané na domácu infláciu (ďalej aj režim DITR<sup>26</sup>). Existuje viacero

<sup>26</sup>skratka z angl. *domestic inflation Taylor rule*

teoretických typov, ako by mohlo toto pravidlo vyzerať<sup>27</sup>. Vhodné Taylorovo pravidlo pre náš model sme zvolili na základe porovnania modelov pomocou *Bayesovho faktora*<sup>28</sup>. Najviac sa osvedčilo *Taylorove pravidlo* malej otvorenej ekonomiky v tvare:

$$r_t = \phi_r * r_{t-1} + (1 - \phi_r) * (\phi_\pi \pi_{H,t} + \phi_y \tilde{y}_t + \phi_e e_t) + \varepsilon_t^v, \quad (1.87)$$

kde  $\phi_r$  predstavuje vyhladenie úrokovej miery, čiže podiel minulej úrokovej miery na hodnote tej súčasnej. Parametre  $\phi_i$  označujú citlivosti úrokovej sadzby na infláciu, medzeru výstupu a zmenu kurzu. Monetárny šok označujeme pomocou  $\varepsilon_t^v$ .

Druhým alternatívnym režimom je *fixovanie kurzu* (režim PEG) daný rovnicou:

$$e_t = 0, \quad (1.88)$$

ktorú nebudeme odhadovať, len porovnáme z hľadiska simulovaných impulzných odoziev a momentov. K tomuto počnaniu nás inšpirovala súčasná ekonomická situácia Českej republiky, kedy pozorujeme odklon od neúčinných úrokových sadzieb a snahu o expanzívnu politiku pomocou devízových operácií.

### 1.4.5 Zahraničie

K skúmaniu vplyvu zahraničnej ekonomiky na domácu využijeme troj-rovnicový vektorový autoregresný model prvého stupňa (VAR(1) model):

$$\begin{aligned} y_t^* &= c_{y^*} + \rho_{y_1^*} y_{t-1}^* + \rho_{y_2^*} \pi_{t-1}^* + \rho_{y_3^*} r_{t-1}^* + \varepsilon_t^{y^*} \\ \pi_t^* &= c_{\pi^*} + \rho_{\pi_1^*} y_{t-1}^* + \rho_{\pi_2^*} \pi_{t-1}^* + \rho_{\pi_3^*} r_{t-1}^* + \varepsilon_t^{\pi^*} \\ r_t^* &= c_{r^*} + \rho_{r_1^*} y_{t-1}^* + \rho_{r_2^*} \pi_{t-1}^* + \rho_{r_3^*} r_{t-1}^* + \varepsilon_t^{r^*} \end{aligned}$$

s troma endogénnymi premennými: zahraničná inflácia  $\pi_t^*$ , zahraničný výstup  $y_t^*$  a zahraničná úroková sadzba  $r_t^*$ . Maticové vyjadrenie procesu je v tvare:

$$F_t^* = C + \rho_F^* F_{t-1}^* + \varepsilon_t^*,$$

kde  $F_t^* \equiv [y_t^* \pi_t^* r_t^*]^T$  je vektor premenných,  $\rho_F^*$  je časovo invariantná matica parametrov 3x3,  $C$  je vektor konštánt a  $\varepsilon_t^* \equiv [\varepsilon_t^{y^*} \varepsilon_t^{\pi^*} \varepsilon_t^{r^*}]^T$  je vektor náhodných zložiek s vlastnosťami:

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t^*) &= 0 \\ E(\varepsilon_t^* \varepsilon_t^{*T}) &= \Sigma \\ E(\varepsilon_t^* \varepsilon_{t-1}^{*T}) &= 0, \end{aligned}$$

kde  $\Sigma$  je kovariančná matica náhodných zložiek. Problematikou VAR modelov a ostatných pasáží týkajúcich sa časových radov sa podrobne zaoberajú napr. Heij (2004) [18] alebo Enders (2010) [11].

Výhodou tohto postupu je fakt, že proces môžeme odhadnúť<sup>29</sup> nezávisle na doterajšom modeli a získať tak odhady neznámych parametrov. V modeli potom tieto hodnoty už len nakalibrujeme a znížime tým náročnosť jeho odhadu. Výsledky odhadu VAR(1) modelu sú uvedené v časti 3.2.

<sup>27</sup>základné sadzby sú Radou guvernérov ČNB jednoducho oznámené verejnosti, pričom nie je známe, či bolo monetárne pravidlo aj prakticky využité

<sup>28</sup>svojim spôsobom ide o jednoduché porovnanie logaritmov posteriórnych hustôt pravdepodobnosti, viac napr. v Koop (2003) [20]

<sup>29</sup>odhad uskutočníme pomocou metódy najmenších štvorcov (OLS) v ekonometrickom toolboxe LeSage [31]

### 1.4.6 Šoky

Okrem šokov zahraničnej ekonomiky spomínaných v predchádzajúcej kapitole obsahuje náš model ďalšie exogénne šoky použité v minulých kapitolách. Tu uvádzame ich súhrn:

- šok v *produktivite*  $\varepsilon_t^a \sim N(0, \sigma_a)$ , ktorý sa vyvíja podľa AR(1) procesu:

$$a_t = \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_t^a$$

- *nefundamentálny* šok  $\varepsilon_t^\chi \sim N(0, \sigma_\chi)$ , ktorý sa vyvíja podľa AR(1) procesu:

$$\chi_t = \rho_\chi \chi_{t-1} + \varepsilon_t^\chi$$

- *monetárny* šok  $\varepsilon_t^v \sim N(0, \sigma_v)$ , ktorý sa podľa AR procesu nevyvíja
- šok v *rizikovej prémii*  $\varepsilon_t^l \sim N(0, \sigma_l)$ , ktorý sa vyvíja podľa AR(1) procesu:

$$l_t = \rho_l l_{t-1} + \varepsilon_t^l$$

- šok v *produktivite*  $\varepsilon_t^p \sim N(0, \sigma_p)$ , ktorý sa podľa AR procesu nevyvíja

## Kapitola 2

# Popis použitých techník

Táto kapitola poskytne stručný prehľad použitých techník a teoretické pozadie, ktoré sa skrývajú za odhadom a analýzou modelu zhrnutého v časti appendixu A.5. V prvej časti za pomoci práce DeJong a Dave (2007) [9] v krátkosti načrtne problematiku riešenia dynamických modelov s racionálnymi očakávaniami a stavovú reprezentáciu modelu<sup>1</sup>. V druhej časti, kde budeme opisovať Kalmanov filter používaný k výpočtu vierohodnostnej funkcie, sa budeme opierať o prácu Canova (2007) [5]. V ďalšej časti sa zmienime o teórii Bayesovského modelovania, ktorej podrobný prehľad ponúka Koop (2003) [20]. Súčasťou tejto kapitoly bude aj popis HP-filtra ako nástroja používaného na detrendovanie časových radov.

### 2.1 Dynamický model s racionálnymi očakávaniami

Ako ukázali v svojej práci Blanchard a Kahn (1980) [3], log-linearizovaný model, ktorý v ďalších častiach odhadneme pomocou softvéru, môžeme prepísať do všeobecného tvaru<sup>2</sup>:

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ {}_tP_{t+1} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} X_t \\ P_{t+1} \end{pmatrix} + \gamma Z_t, \quad X_{t=0} = X_0, \quad (2.1)$$

$${}_tP_{t+1} = E[P_{t+1} | \Omega_t], \quad (2.2)$$

za podmienky  $\forall t \exists \bar{Z}_t \in \mathbb{R}^k, \quad \theta_t \in \mathbb{R}$  čiže:

$$-(1+i)^{\theta_t} \bar{Z}_t \leq E[Z_{t+i} | \Omega_t] \leq (1+i)^{\theta_t} \bar{Z}_t \quad \forall i \geq 0, \quad (2.3)$$

kde  $X_t$  je vektor  $(n \times 1)$  *endogénne predeterminovaných*<sup>3</sup> premenných v čase  $t$ ,  $P_t$  je  $(m \times 1)$  vektor *nepredeterminovaných*<sup>4</sup> premenných v čase  $t$ ,  $Z_t$  je vektor  $(K \times 1)$  *exogénne pôsobiacich* premenných. Pomocou ľavého indexu  $t$  v člene  ${}_tP_{t+1}$  značíme očakávanie agentov v čase  $t$  podmienené informáciami do času  $t$ , ktoré sú obsahom *informačnej množiny*  $\Omega_t$ . Matica  $A$  rozmeru  $(n+m) \times (n+m)$  je konštantná a takisto aj matica  $\gamma$  rozmeru  $(n+m) \times k$ .

<sup>1</sup>preklad z angl. *state-space representation*

<sup>2</sup>existuje široké spektrum vpred-hľadiacich dynamických modelov s racionálnymi očakávaniami a na niektoré je nutné použiť iný typ metódy ako opísali Blanchard a Kahn, podrobnosti možné nájsť v knihe DeJong, Dave (2007) [9]

<sup>3</sup>preklad z angl. *predetermined*, ide o premenné nezávislé na očakávaní, len na dostupných súčasných a minulých informáciách, t. j.  $E[X_{t+1} | \Omega_t] = X_{t+1}$

<sup>4</sup>preklad z angl. *non-predetermined*, ide o vpred-hľadacie premenné, ktoré môžu závisieť aj na budúcnosti

Rovnicou 2.1 je popísaný náš štrukturálny model, ktorý predpokladá symetrickosť informácií všetkých agentov. Vzťah 2.2 je podmienkou racionálneho očakávania, t. j. každý využíva pre svoje budúce rozhodnutia všetky dostupné minulé a súčasné informácie. Podmienka 2.3 vylučuje možnosť explozívneho vývoja exogénnych premenných.

K vyriešeniu modelu budeme potrebovať *Jordanov kononický tvar* matice  $A$ :

$$A = C^{-1}JC,$$

ktorý rozkladá matice na komponenty  $C$  a  $J$ . Jordanova matica  $J$  je diagonálna a tvorená vlastnými číslami matice  $A$ , ktoré sú zoradené vzostupne podľa ich absolútnych hodnôt. Nech  $k$  označuje počet explozívnych vlastných čísel (absolútna hodnota  $\geq 1$ ) a  $m$  je počet nepredeterminovaných premenných v modeli. Potom môžu nastať tri situácie:

1.  $m = k$  ...existuje práve jedno riešenie systému (sedlový bod)
2.  $m > k$  ...neexistuje riešenie systému (ohnisko)
3.  $m < k$  ...existuje nekonečne veľa riešení systému (uzol)

Po dekompozícii matice  $A$  je možné vyjadriť model v tzv. *stavovom tvare*:

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= a(\theta)X_t + B(\theta)V_{t+1}, \\ Y_t &= C(\theta)X_t + D(\theta)W_t, \end{aligned} \quad (2.4)$$

kde  $X_t$  je vektor endogénnych premenných,  $Y_t$  je vektor pozorovaných veličín,  $V_t$  je vektor exogénnych šokov spĺňajúci  $V_t \sim N(0, \Sigma_V)$  a  $W_t$  je vektor chýb v meraní spĺňajúci  $W_t \sim N(0, \Sigma_W)$ ,  $\theta$  je vektor neznámych štrukturálnych parametrov a matice  $A, B, C, D$  sú jeho maticové funkcie.

### 2.1.1 Kalmanov filter

Canova (2007) [5] považuje Kalmanov filter za jeden z najdôležitejších nástrojov aplikovanej makroekonómie. V jeho práci nájdete podrobné odvodenie, algoritmus aj príklady.

Užívateľská príručka softvéru Dynare (autor Griffoli (2013) [17]) uvádza *riešenie stavového systému* 2.4 ako systém rovníc:

$$Y_t = MX(\theta) + Mx_t + N(\theta)Q_t + W_t, \quad (2.5)$$

$$x_t = g_x(\theta)x_{t-1} + g_v(\theta)V_t, \quad (2.6)$$

$$E[V_t V_t^T] = V(\theta), \quad (2.7)$$

$$E[W_t W_t^T] = W(\theta), \quad (2.8)$$

kde  $x_t$  značí odchýlku premennej  $X_t$  od ustáleného stavu  $X$  a  $N(\theta)Q_t$  je trendová zložka. Matica  $M$  je konštantná a matica  $N$  je funkciou vektora  $\theta$ . Rovnica 2.6 označuje *rozhodovacie pravidlo*, 2.7 kovariančnú maticu exogénnych premenných a 2.8 je kovariančná matica chýb merania.

Ďalším krokom je odhad vierohodnostnej funkcie tohto systému. Problémom je fakt, že rovnice sú nelineárne v tzv. *deep* parametroch<sup>5</sup>. Nakoľko je náš log-linearizovaný model lineárny v

<sup>5</sup>štruktúrne parametre modelu, viď tabuľka B.5

premenných, či už exogénnych alebo endogénnych, vierohodnostná funkcia môže byť vyhodnotená pomocou algoritmu akým je *Kalmanov filter* daný rekurzívne:

$$V_t = Y_t - \bar{Y} - Mx_t - NQ_t, \quad (2.9)$$

$$F_t = MP_tM^T + V, \quad (2.10)$$

$$K_t = g_x P_t g_x^T F_t^{-1}, \quad (2.11)$$

$$x_{t+1} = g_x x_t + K_t V_t, \quad (2.12)$$

$$P_{t+1} = g_x P_t (g_x - K_t M)^T + g_w Q g_w^T, \quad (2.13)$$

s počiatočnými podmienkami  $Y_1$  a  $P_1$ , pre  $t = 1, \dots, T$ . Z rekurzívnej je potom možné odvodiť *logaritmickú vierohodnostnú funkciu* v tvare:

$$\log \mathcal{L}(\Theta|Y_T) = -\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log |F_t| - \frac{1}{2} V_t^T F_t^{-1} V_t, \quad (2.14)$$

kde vektor  $\Theta$  obsahuje parametre, ktoré sa snažíme odhadnúť:  $\theta, V(\theta), Q(\theta)$  a  $Y_T$  je množina pozorovaných endogénnych premenných.

*Logaritmus jadrovej posteriórnej hustoty* v tvare:

$$\log \mathcal{H}(\Theta|Y_T) = \log \mathcal{L}(\Theta|Y_T) + \log p(\theta), \quad (2.15)$$

získame kombinovaním logaritmu vierohodnostnej funkcie a známej *apriórnej informácie* (druhý člen na pravej strane rovnice).

## 2.2 Bayesovské metódy

Bayesovské metódy sa od konvenčnej ekonometrie líšia vo viacerých ohľadoch, no asi najhlavnejším rozdielom je náhodnosť odhadovaných parametrov (značíme  $\theta$ ). Ich odhad je kombináciou dátovej a nedátovej informácie. Kladieme si otázku: „Čo môžeme povedať o parametroch pri známych dátach (značíme ako  $y$ )?“. V ďalších častiach sa túto otázku pokúsime zodpovedať.

Základným stavebným kameňom Bayesiánskej analýzy je známy *prvý Bayesov vzorec*:

$$p(B|A) = \frac{p(A|B)p(B)}{p(A)}. \quad (2.16)$$

Vzorec platný pre náhodné veličiny je možné aplikovať aj na hustoty pravdepodobnosti:

$$p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{p(y)}, \quad (2.17)$$

kde podmienená hustota pravdepodobnosti  $p(\theta|y)$  sa nazýva *posteriórna hustota*, podmienenú hustotu  $p(y|\theta)$  voláme aj *vierohodnostná funkcia* a  $p(\theta)$  je *apriórna hustota* pravdepodobnosti. Vidíme, že parametre  $\theta$  nezávisia na hodnote marginálnej hustoty  $p(y)$ , takže po zavedení operátora proporcionality  $\propto$  prepíšeme vzťah:

$$p(\theta|y) \propto p(y|\theta)p(\theta). \quad (2.18)$$

K znalosti posteriórnej hustoty, ktorá je odpoveďou na hore kladenú otázku, potrebujeme poznať vierohodnostnú funkciu a apriórnu hustotu. Vierohodnostnú funkciu získame pomocou Kalmanovho filtra a apriórna hustota je určená na základe našich skúseností a empirických znalostí –zjednodušene povedané, vďaka nej môžeme vyjadriť svoj názor, ako by sa mali parametre  $\theta$  správať nezávisle na vývoji dát.

Neznáme parametre, resp. ich očakávanú hodnotu podmienenú dátami (*posteriórnu strednú hodnotu*), potom môžeme vypočítať podľa vzťahu:

$$E[\theta|y] = \int_{\theta} \theta p(\theta|y) d\theta. \quad (2.19)$$

Až na pár výnimočných situácií nevieme vypočítať tento integrál analyticky, pretože nepoznáme presný tvar posteriórnej hustoty. Ak sme z nej schopní aspoň generovať vzorky, vieme pomocou *Monte Carlo simulácií* tvar integrálu odhadnúť.

### 2.2.1 Metropolis–Hastings algoritmus

Tento algoritmus, ktorý vytvoril pán Metropolis v roku 1953 a zovšeobecnil pán Hastings v roku 1970, predstavuje celú triedu algoritmov k vytvoreniu posteriórnych simulácií. Využíva sa hlavne v situácii, keď je obtiažne z posteriórnej hustoty generovať vzorky priamo. Nasledujúce odstavce ponúknu zjednodušený popis algoritmu.

Prvým krokom je voľba počiatkovej hodnoty parametru, ktorú označíme  $\theta^{(0)}$ . Efekt tejto počiatkovej hodnoty vyprchá, pretože prvých  $S_0$  vzoriek na konci algoritmu odstránime.

Ďalej zavedieme pojem *kandidátska hustota*<sup>6</sup>. Nech  $\theta^*$  označuje *kandidátsky výber* z tejto hustoty, ktorú označíme  $q(\theta^{(s-1)}; \theta)$ , t. j. kandidátsky výber  $\theta^*$  je realizáciou náhodnej veličiny  $\theta$ , ktorej hustota závisí na minulom výbere  $\theta^{(s-1)}$ . Touto vlastnosťou sa zaraďuje MH algoritmus medzi *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC) algoritmy a postupnosť  $\theta^{(s)}$  pre  $s = 1, \dots, S$  je označovaná ako reťazec. Každý výber v rámci algoritmu má rovnakú váhu, no nie všetky sú akceptované (viac v nasledujúcom odstavci).

Treťou dôležitou náležitosťou je *akceptačná pravdepodobnosť*<sup>7</sup>  $\alpha(\theta^{(s-1)}, \theta^*)$ . MCMC algoritmus prechádzajúci pravdepodobnostnou hustotou má tendenciu vyberať vzorky s vyššou posteriórnu pravdepodobnosťou a naopak menej vzoriek z oblasti nízkej posteriórnej hustoty pravdepodobnosti. Je dôležité, aby sme nezamieňali pojmy kandidátska a posteriórna hustota. Výbery z kandidátskej hustoty nie sú schopné pokryť celú oblasť parametrického priestoru. Matropolis–Hastings algoritmus preto neakceptuje každý kandidátsky výber a práve k tomuto slúži akceptačná pravdepodobnosť, ktorá je najvyššia v oblastiach, kde je posteriórna hustota vysoká a naopak. Ak minulé vzorka  $\theta^{(s-1)}$  je z oblasti nízkej posteriórnej pravdepodobnosti, algoritmus od nej v ďalšom kroku „utečie“. Naopak ak je minulé vzorka  $\theta^{(s-1)}$  z oblasti vysokej posteriórnej pravdepodobnosti, algoritmus tam pravdepodobne zotrúva. Rovnaká úvaha platí aj pre kandidáta  $\theta^*$ , ktorý bude akceptovaný s vysokou pravdepodobnosťou, ak bude z oblasti s vyššou posteriórnu hustotou ako má  $\theta^{(s-1)}$ . Naopak, kandidátov z oblasti s nízkou posteriórnu pravdepodobnosťou budeme chcieť s vysokou pravdepodobnosťou zamietnuť. Reťazec takýmto spôsobom smeruje k vyšším posteriórny pravdepodobnostiam. Avšak nie je celkom žiadúce, aby algoritmus stále ostával v oblastiach

<sup>6</sup>preklad z angl. *candidate generatig density*

<sup>7</sup>preklad z angl. *acceptance probability*

vysokej posteriórnej hustoty, ale aby preskúmal (aj keď len občas) aj ostatné oblasti. Preto je dôležitá správna konštrukcia akceptačnej pravdepodobnosti. Jednu takú ponúka nasledujúci vzorec:

$$\alpha(\theta^{(s-1)}; \theta^*) = \min \left[ \frac{p(\theta = \theta^* | y) q(\theta^*; \theta = \theta^{(s-1)})}{p(\theta = \theta^{(s-1)} | y) q(\theta^{(s-1)}; \theta = \theta^*)}, 1 \right], \quad (2.20)$$

kde  $p(\theta = \theta^* | y)$ , resp.  $p(\theta = \theta^{(s-1)} | y)$  je označenie pre posteriórnu hustotu vyhodnotenú v bode  $\theta^*$ , resp.  $\theta^{(s-1)}$ . Ďalej  $q(\theta^*; \theta)$  je kandidátska hustota pre náhodnú veličinu  $\theta$  (závislá aj na  $\theta^*$ ), čiže  $q(\theta^*; \theta = \theta^{(s-1)})$  je táto hustota vyhodnotená v bode  $\theta^{(s-1)}$ . Operátor minimum zaisťuje prirodzený predpoklad platný pre pravdepodobnosť, ktorá nesmie byť vyššia ako jedna. Takto volená akceptačná pravdepodobnosť zaisťuje konvergenciu algoritmu a spĺňa všetky vyššie kladené požiadavky.

Pokiaľ predošlé kroky zopakujeme  $S$  krát za sebou a  $S_0$  vzoriek odstránime, získame náhodný výber  $\theta^{(S_0+1)}, \dots, \theta^{(S)}$ . Ak označíme pomocou  $g(\cdot)$  funkciu parametrov, ktoré nás zaujímajú, tak odhad jej strednej hodnoty získame pomocou Monte Carlo simulácií s konečným počtom vzoriek v tvare:

$$E[g(\theta | y)] = \frac{1}{S - S_0} \sum_{s=S_0+1}^S g(\theta^{(s)}). \quad (2.21)$$

Čím vyšší počet replikácií  $S$  volíme, tým by mali byť výsledky uspokojivejšie.

MCMC algoritmus sa dá zhrnúť v nasledujúcich krokoch:

1. krok: voľba počiatkovej hodnoty  $\theta^{(0)}$
2. krok: vygenerovanie kandidáta  $\theta^*$  zo zvolenej kandidátskej hustoty  $q(\theta^{(s-1)}; \theta)$
3. krok: výpočet akceptačnej pravdepodobnosti  $\alpha(\theta^{(s-1)}; \theta)$  podľa vzorca 2.20
4. krok: nastavenie hodnôt:
  - $\theta^{(s)} = \theta^*$  („útek“) s pravdepodobnosťou  $\alpha(\theta^{(s-1)}; \theta)$
  - $\theta^{(s)} = \theta^{(s-1)}$  (nehybnosť) s pravdepodobnosťou  $1 - \alpha(\theta^{(s-1)}; \theta)$
5. krok:  $S$  násobné opakovanie krokov 2, 3 a 4
6. krok: vylúčenie prvých  $S_0$  vzoriek
7. krok: spriemerovanie vzoriek pomocou vzorca 2.21 a získanie bodového odhadu neznámej funkcie  $g(\theta)$

V praxi to je to trochu zložitejšie. Pokiaľ kandidátska hustota nie je dobre vybraná, môže sa stať, že všetci kandidáti budú zamietnutí a refazec bude dlho stáť na jednom mieste. Výber hustoty je teda dôležitý a pre kontrolu si môžeme pozrieť konvergenčné diagnostiky. Existuje viacero stratégií výberu kandidátskej hustoty a podľa nich vznikli aj rôzne verzie M–H algoritmu. Dve najznámejšie sú *Independence Chain M–H algoritmus* a *Random Walk Chain M–H algoritmus*. Druhý menovaný si priblížime bližšie, nakoľko ho budeme používať v empirickej časti.

## 2.2.2 Random Walk Chain M–H algoritmus

Snahou RWCMH algoritmu nie je aproximovať posteriórnu hustotu ako je tomu u iných typov algoritmov. Namiesto toho sa snažíme vybrať kandidátsku hustotu so širokým záberom, ktorá berie náhodné výbery z rôznych oblastí posteriórnej hustoty proporcionálne. K tomu potrebujeme zaviesť *prírastkovú náhodnú veličinu*  $z$ .<sup>8</sup> Kandidáti sú potom generovaní ako *náhodná predhádzka* podľa schémy:

$$\theta^* = \theta^{(s-1)} + z, \quad (2.22)$$

pričom správny smer posunu zabezpečuje akceptačná pravdepodobnosť. Z rovnosti 2.22 vyplýva aj rovnosť:

$$q(\theta^*; \theta = \theta^{(s-1)}) = q(\theta^{(s-1)}; \theta = \theta^*),$$

čo po dosadení do všeobecnej formuly pre akceptačnú pravdepodobnosť 2.20 implikuje zjednodušený tvar:

$$\alpha(\theta^{(s-1)}; \theta^*) = \min \left[ \frac{p(\theta = \theta^* | y)}{p(\theta = \theta^{(s-1)} | y)}, 1 \right], \quad (2.23)$$

z ktorého je zrejmé, že reťazec postupuje do oblastí s vyššou posteriórnou hustotou.

Výber hustoty prírastkovej náhodnej veličiny  $z$  priamo determinuje tvar kandidátskej hustoty. Obvykle volíme viacrozmerne normálne rozdelenie, čo nám umožní zo vzťahu 2.22 získať strednú hodnotu v tvare  $\theta^{(s-1)}$ . To neplatí pre *kovariančnú maticu* (značíme  $\Sigma$ ), ktorej tvar nepoznáme a je nutné ho zvoliť. Suma sumárum:

$$q(\theta^{(s-1)}; \theta) = f_N(\theta | \theta^{(s-1)}, \Sigma). \quad (2.24)$$

Voľba matice  $\Sigma$  ovplyvňuje akceptačnú pravdepodobnosť a môžu nastať dve nežiadúce situácie a ich dôsledky:

- príliš nízka  $\alpha(\theta^{(s-1)}; \theta^*)$ , resp. príliš veľká  $\Sigma$ :
  - kandidátske výbery skoro vždy zamietnuté – reťazec stojí
  - počet replikácií  $S$  musí byť veľmi vysoký, aby sme prešli oblasť celej posteriórnej hustoty
  - veľká  $\Sigma$  indikuje veľa vzoriek z koncov rozdelenia
- príliš vysoká  $\alpha(\theta^{(s-1)}; \theta^*)$ , resp. príliš malá  $\Sigma$ :
  - $\theta^*$  a  $\theta^{(s-1)}$  ležia veľmi blízko seba
  - počet replikácií  $S$  musí byť veľmi vysoký, aby sme prešli oblasť celej posteriórnej hustoty

Optimálna hodnota akceptačnej pravdepodobnosti je ohraničená nasledovne:

$$0.2 < \alpha(\theta^{(s-1)}; \theta^*) < 0.4$$

---

<sup>8</sup>preklad z angl. *increment random variable*

## 2.3 Hodrick–Prescottov filter

Hodrick–Prescottov filter (HP–filter) je jednoduchým a účinným nástrojom k dekompozícii časových radov na *trendovú a cyklickú zložku*. V jeho pozadí stojí jediný vzorec:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Y_t - \mu_t)^2 + \frac{\lambda}{T} \sum_{t=2}^{T-1} [(\mu_{t+1} - \mu_t) - (\mu_t - \mu_{t-1})]^2, \quad (2.25)$$

kde  $Y_1, \dots, Y_T$  sú pozorovania časového radu  $Y_t$  v ekvidistantných časových krokoch  $t = 1 \dots T$ . Snahou HP–filtra je minimalizácia uvedeného vzorca vzhľadom ku trendovej zložke  $\mu_t$ . Kľúčovú rolu zohráva parameter  $\lambda$ , ktorého voľbou môžeme ovplyvniť stupeň vyhladenia trajektórie časového radu. V limitnom prípade  $\lambda = 0$  druhá suma vypadne a trendová zložka kopíruje priebeh časového radu. Cyklická zložka je nulová. Ak je  $\lambda$  naopak obrovská, tvar trendovej krivky sa podobá úsečke. Literatúra sa zhodla na konvenčnej hodnote  $\lambda = 1600$  pre štvrtročné dáta. Zaujímavosťou môžu byť aj ďalšie informácie o HP–filtru a o časových radoch celkovo v knihe Enders (2010) [11].

V našej práci budú cyklické zložky filtrovaných premenných predstavovať odchýlky od ich ustáleného stavu (trendu).

## 2.4 Stochastické simulácie

Séria stochastických simulácií nám pomôže získať informácie o modelových momentoch, koreláciách a autokoreláciách premenných, ktoré potom môžeme použiť na porovnanie s údajmi získanými priamo z dát.

Najprv ukážeme, ako funguje priebeh jednej simulácie:

- nastavenie parametrov na odhadnuté posteriórne stredné hodnoty, resp. kalibrované hodnoty
- doplnenie údajov o smerodajných odchýlkach a koreláciách šokov z odhadu ich vyhladených trajektórií, čím získame kovariančnú maticu (označíme  $\Sigma_s$ )
- generovanie vzorky z viacrozmerneho normálneho rozdelenia  $N(\mu, \Sigma_s)$ , kde  $\mu$  je nulový vektor, ktorého dĺžka sa rovná počtu exogénnych šokov
- na základe vzorky z minulého bodu sa následne pomocou modelových rovníc vygenerujú nové trajektórie pre každú z premenných v ľubovoľnom rozsahu  $R = R_0 + R_1$ , pričom  $R_1$  je totožné s dĺžkou horizontu našich pozorovaných dát
- vynechanie prvých  $R_0$  generovaných hodnôt, aby sme zabránili vplyvu počiatkovej hodnoty.

Týmto postupom dostaneme pre každú premennú jednu vygenerovanú časovú postupnosť s dĺžkou zodpovedajúcou pozorovaným veličinám, čiže  $R_1$ . Z nej je jednoduché vypočítať bodové odhady, ako napr. priemer, smerodajnú odchýlku, korelácie s ostatnými premennými a autokorelácie až do stupňa  $p$ .

S ešte väčšou snahou spresniť výsledky a získať aj intervalové odhady, je možné simuláciu zopakovať  $N$  krát. Pre každú premennú obdržíme  $N$  náhodných realizácií každého bodového odhadu, odkiaľ už nie je problém vypočítať kvantily a získať empirický interval spoľahlivosti.

V ďalších častiach k našim simuláciám využijeme tento koncept s hodnotami parametrov  $R_1 = 60$ ,  $R_0 = 100$ ,  $p = 5$  a  $N = 500$

## Kapitola 3

# Odhad a analýza výsledkov

V tejto kapitole predstavíme empirické výsledky modelu<sup>1</sup> na ekonomike Českej republiky. Prvá časť kapitoly obsahuje popis použitých dát. V druhej časti predstavíme kalibráciu parametrov. Tretia časť bude venovaná apriórnym hodnotám, výsledkom odhadu a ich vecnej interpretácii. V ďalšej časti v krátkosti okomentujeme šokové dekompozície vybraných veličín a v poslednej časti skontrolujeme kvalitu vyrovnania dát pomocou porovnania modelových a dátových momentov.

### 3.1 Dáta

K odhadu použijeme štvrťročné dáta vzťahujúce sa k obdobiu 2000:1 až 2014:4 (celkovo 60 pozorovaní každej veličiny) získané z databáz *Českej národnej banky* [32], *Českého štatistického úradu* [33] a *Eurostatu* [34].

Okrem výmenného kurzu  $\Xi_t$  použijeme ďalších 7 časových radov, ktoré rozdelíme na domáce a zahraničné. Domácu českú ekonomiku reprezentujú:

- reálny hrubý domáci produkt ...  $Y_t$
- index spotrebiteľských cien (2014=100 %) ...  $P_t$
- 3-mesačná úroková miera PRIBOR<sup>2</sup> (% p.a.) ...  $R_t$
- reálna cena indexu PX (nominálna cena delená deflátorom HDP) ...  $Q_t$

Zahraničie, ktoré nahradzujeme *Európskou menovou úniou*, resp. Eurozónou zastupujú údaje:

- reálny hrubý domáci produkt ...  $Y_t^*$
- index spotrebiteľských cien (2014=100 %) ...  $P_t^*$
- 3-mesačná úroková miera EURIBOR<sup>3</sup> (% p.a.)...  $R_t^*$

<sup>1</sup>konkrétne rovnice použité pri odhade sú zhrnuté v apendixe A.5

<sup>2</sup>skratka z angl. *Prague Interbank Offered Rate*

<sup>3</sup>skratka z angl. *Euro Interbank Offered Rate*

Vývoj týchto veličín ponúkame zobrazený graficky na Obrázku C.2.

Originálne dáta sme upravili, aby zodpovedali modelovým, čiže logaritmickým odchýlkam od ustálených stavov. K tomu bol použitý HP-filter zmiený v časti 2.3. Jednotlivé pozorované premenné vstupujúce do modelu boli transformované nasledovne:

- domáci a zahraničný výstup, cena akciového indexu a nominálny výmenný kurz:
  - aplikovanie funkcie logaritmu na  $Y_t, Y_t^*, Q_t, \Xi_t$
  - následne  $y_t, y_t^*, q_t, e_t$  získané ako šumy HP-filtera
- domáca a zahraničná inflácia:
  - výpočet hrubej miery domácej aj zahraničnej inflácie  $\Pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$ , resp.  $\Pi_t^* = \frac{P_t^*}{P_{t-1}^*}$
  - aplikovanie funkcie logaritmu na  $\Pi_t$  a  $\Pi_t^*$
  - následne  $\pi_t$  a  $\pi_t^*$  získané ako šumy HP-filtera
- domáca a zahraničná úroková miera:
  - delenie úrokovej miery koeficientom 400, aby sme získali alikvótnu štvrtročnú časť uvedenú nie v percentách
  - následne  $r_t$  a  $r_t^*$  získané ako šumy HP-filtera<sup>4</sup>

Transformované dáta môžete nájsť vykreslené na Obrázku C.3.

## 3.2 Kalibrácia parametrov

Počas odhadovej procedúry budeme niektoré modelové parametre z tabuľky B.5 len kalibrovať. Ide o štrukturálne parametre, ktoré je zložité odhadnúť, preto ich zafixujeme na konvenčných hodnotách. Súhrn kalibrovaných parametrov domácej ekonomiky uvádzame v tabuľke 3.1.

Diskontný faktor  $\beta$  je nastavený na 0.99, čo zodpovedá 4% p. a. tržnej úrokovej miere v ustálenom stave.

Elasticity substitúcie sú nastavené na priemer hodnôt z viacerých zdrojov:  $\omega = \zeta = 1.2$  a  $\varepsilon = 6$ . Z  $\varepsilon = 6$  priamo vyplýva čistá prirážka nad medzné náklady  $\mu = 0.02$ .

Medzi parametrom  $\Lambda$  a analizovanou rizikovou prémieou ( $rp$ ) platí vzťah  $\Lambda = \frac{rp}{4(1+r)}$ . Práca Fernandez, Linares a Fernandez [12], zaoberajúca sa podrobným prieskumom rizikovej prémie, uvádza priemernú hodnotu pre Českú republiku na úrovni 6.5% p. a., čo implikuje  $\Lambda = 0.016$ .

Posledným kalibrovaným parametrom je inverzia Frischovej elasticity práce. Pre tú sme použili hodnotu z Jones (2008) [19] na úrovni  $\varphi = 4$ .

Kalibrácia zahraničia na základe odhadnutého VAR(1) modelu je v tabuľke 3.2. Vektor konštánt  $C$  vyšiel nevýznamný, preto je vynechaný. Stabilitu sme overili výpočtom inverzných hodnôt koreňov charakteristického polynómu matice  $I - \rho_F^*$ <sup>5</sup>. Všetky ležali vnútri jednotkovej kružnice.

<sup>4</sup>napriek tomu, že model nepredpokladal úrokové miery ako odchýlky od ustálených stavov a volil ustálený stav  $\bar{p}$ , my budeme pracovať s odchýlkou od ustáleného stavu a  $\bar{p} = 0$

<sup>5</sup>matica  $I$  predstavuje jednotkovú maticu 3x3

	parameter	hodnota
$\beta$	diskontný faktor	0.99
$\omega$	elasticita substitúcie medzi domácimi a zahraničnými statkami	0.5
$\varepsilon$	elasticita substitúcie medzi statkami jednej krajiny	6
$\zeta$	elasticita substitúcie medzi statkami rôznych krajín	0.5
$\Lambda$	podmienená kovariancia medzi $F_{t,t+1}$ a $\Pi_{t+1} \frac{Q_{t+1} + D_{t+1}}{Q_t}$	0.016
$\varphi$	inverzia rovnovážnej hodnoty Frischovej elasticity v ponuke práce	4

Tabuľka 3.1: Kalibrované parametre

rovnica	hodnoty parametrov			smerodajné odchýlky šokov
	$y_{t-1}^*$	$\pi_{t-1}^*$	$r_{t-1}^*$	$\sigma_i$
$y_t^*$	1.2028	0.4796	-3.1353	0.0069
$\pi_t^*$	0.1799	0.0815	-1.1098	0.0024
$r_t^*$	0.0792	0.0406	0.3010	0.0007

Tabuľka 3.2: Odhadnuté parametre VAR(1) modelu

### 3.3 Apriórne a posteriórne informácie

Apriórne charakteristiky sú štandardne volené podľa ich rozsahu a najčastejšie ide o rozdelenia pravdepodobnosti uvedené v tabuľke 3.3, kde  $\mu$  je stredná hodnota a  $\sigma$  smerodajná odchýlka parametra. Na základe tejto tabuľky a rozsahu našich parametrov uvedených v tabuľke B.5 sme volili adekvátne rozdelenia (viď tabuľka 3.4).

rozsah	rozdelenie a charakteristiky	názov rozdelenia
$\mathbb{R}$	$N(\mu, \sigma)$	normálne
$[p_3, \infty)$	$G_2(\mu, \sigma, p_3)$	gamma
$\mathbb{R}^+$	$IG_1(\mu, \sigma)$	inverzné gamma
$[p_3, p_4]$	$U(\mu, \sigma, p_3, p_4)$	beta

Tabuľka 3.3: Používané apriórne rozdelenia

Článok Dalsgaard (2008) [8] uvádza *plánovací horizont* domácností na úrovni 10 rokov (40 období). Parameter  $\gamma$  považujeme za jeho inverznú hodnotu, teda apriori 0.025 so smerodajnou odchýlkou 0.01.

Otvorenosť ekonomiky sme dopočítali z dát ako priemerný podiel českých exportov na českom HDP. Získali sme  $\alpha = 0.575$  a smerodajnú odchýlku 0.14.

Podiel ex-post firiem je podľa analýzy Baxa, Plašil, Vašíček (2015) [1] v Českej republike rovný hodnote  $\tau = 0.38$  so smerodajnou odchýlkou 0.15.

Calvo parameter cenovej strnulosti  $\theta = 0.6$  sme získali ako priemer z viacerých štúdií zaoberajúcich sa českou ekonomikou a táto hodnota nesie apriórnu informáciu o priemernej dĺžke kontraktu na úrovni 7.5 mesiaca. Odchýlku sme stanovili na úroveň 0.15.

Parametre monetárneho pravidla preberáme z práce Caranini (2013) [6]. Ide o hodnoty parametrov  $\phi_r = 0.8$ ,  $\phi_\pi = 1.5$ ,  $\phi_y = 0.25$ ,  $\phi_e = 0.25$  so smerodajnými odchýlkami 0.15, 0.5, 0.15, 0.15.

Parametre perzistencie z AR(1) procesov  $\rho_i$  a smerodajné odchýlky šokov  $\sigma_i$  nastavujeme apriori podľa práce Tvrz (2012) [26] (viď tabuľka 3.4).

V kapitole 2 sme si pripravili teoretický koncept, na ktorého základe bol odhadnutý DSGE model z časti A.5. Použitý bol k tomu voľne dostupný toolbox Dynare [30] a dva reťazce MCMC algoritmu s 800 000 vzorkami, pričom prvých 75% bolo odstránených, aby sa zabránilo vplyvu počiatkových hodnôt. Akceptačná pravdepodobnosť bola udržiavaná na konvenčnej hodnote 0.3 a to pomocou obmedzenia, kladeného na kovariančnú maticu prírastkovej funkcie.

Súhrnný prehľad apriórnych a posteriórnych informácií je v tabuľke 3.4. Z pohľadu na konvergenčnú diagnostiku MCMC algoritmu vykreslenú na obrázku C.1 usudzujeme, že modelové parametre bez problémov skonvergovali.

parametre	posterior				prior		
	m	s	90% HPDI		m	s	rozdelenie
$\gamma$ psť. úmrtia domácnosti	0.0251	0.0093	[0.0091	0.0406]	0.025	0.01	beta
$\alpha$ miera otvorenosti ekonomiky	0.2677	0.0931	[0.1151	0.4179]	0.575	0.14	beta
$\tau$ podiel ex-post firiem	0.3805	0.1743	[0.1334	0.6228]	0.380	0.15	beta
$\theta$ cenová rigidita	0.6002	0.1747	[0.3554	0.8449]	0.600	0.15	beta
parametre Taylorovho pravidla							
$\phi_r$ zotrvačnosť úrokovej miery	0.7032	0.0537	[0.6174	0.7935]	0.80	0.15	beta
$\phi_\pi$ cit. na infláciu	2.5273	0.3446	[1.9516	3.0581]	1.50	0.50	normálne
$\phi_y$ cit. na medzeru výstupu	0.4804	0.1292	[0.2704	0.6969]	0.25	0.15	normálne
$\phi_e$ cit. na kurz	0.0416	0.0193	[0.0072	0.0731]	0.25	0.15	normálne
parametre zotrvačnosti							
$\rho_a$ zot. šoku v produktivite	0.9498	0.0166	[0.9228	0.9793]	0.5	0.15	beta
$\rho_\chi$ zot. nefundamentálneho šoku	0.7002	0.0575	[0.6047	0.7994]	0.5	0.15	beta
$\rho_t$ zot. šoku v rizikovej prémii	0.2932	0.0899	[0.1487	0.4332]	0.5	0.15	beta
smerodajné odchýlky šokov							
$\sigma_a$ s. o. šoku v produktivite	0.0111	0.0011	[0.0093	0.0130]	0.05	$\infty$	inv. gamma
$\sigma_\chi$ s. o. nefundamentálneho šoku	0.0378	0.0076	[0.0242	0.0508]	0.05	$\infty$	inv. gamma
$\sigma_v$ s. o. monetárneho šoku šoku	0.0071	0.0007	[0.0059	0.0081]	0.05	$\infty$	inv. gamma
$\sigma_t$ s. o. šoku v rizikovej prémii	0.0229	0.0020	[0.0195	0.0261]	0.05	$\infty$	inv. gamma
$\sigma_p$ s. o. nákladového šoku	0.0092	0.0009	[0.0077	0.0107]	0.05	$\infty$	inv. gamma

m – stredná hodnota; s – smerodajná odchýlka

Tabuľka 3.4: Apriórne a posteriórne informácie

## Štrukturálne parametre

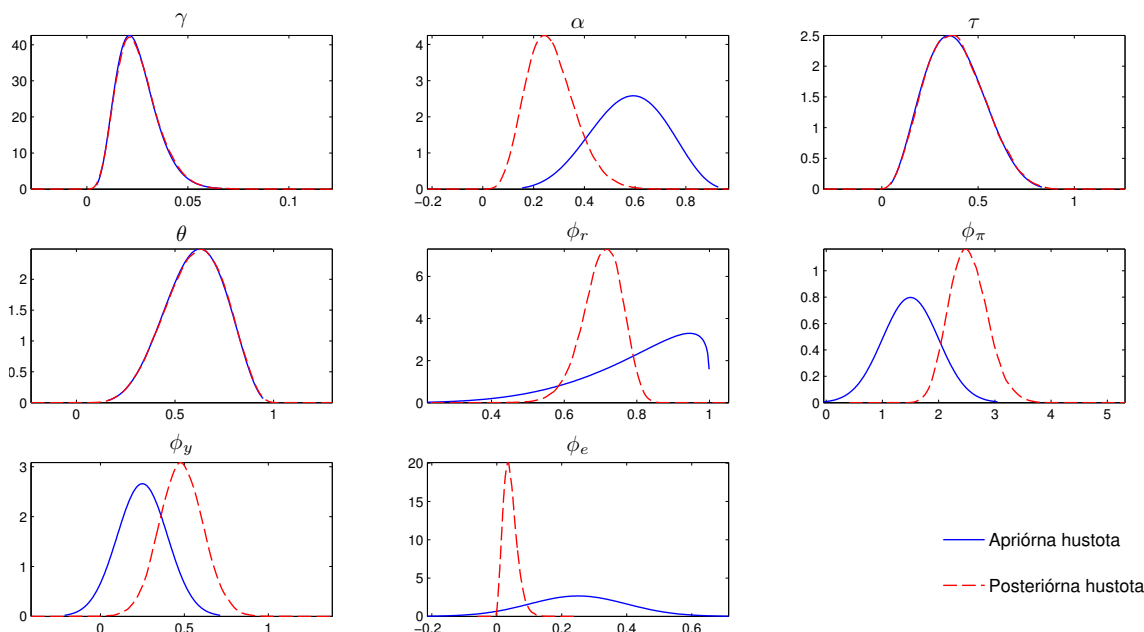
Posteriórne a apriórne hustoty týchto parametrov vidíme na Obrázku 3.1. Môžeme pozorovať, že s výnimkou parametra  $\alpha$  sa tvary posteriórne hustoty nelíšia od tej apriórnej. To môže byť spôsobené viacerými faktormi, ako napríklad korektným nastavením apriórnych hodnôt, ktoré zodpovedá hore uvedenej literatúre a podmienkam českej ekonomiky, alebo že dáta nám o parametroch poskytujú minimálne množstvo informácií. V každom prípade môžeme z posteriórnych stredných hodnôt vyvodiť nasledujúce závery.

Plánovací horizont domácností v Českej republike sa pohybuje na úrovni cca. 10 rokov (vyplýva z hodnoty parametra  $\gamma$ ).

Calvo parameter cenovej rigidity implikuje, že priemerná dĺžka ceny je s pravdepodobnosťou 90% v rozmedzí šiestich mesiacov až dvoch rokov, no zo strednej hodnoty plynie, že firma mení v priemere cenu raz za 7.5 mesiacov.

Podiel ex-post firiem na českom trhu odhaduje náš model s pravdepodobnosťou 90% na 13 až 62% a bodový odhad tohto parametra predpokladá 38% podiel. Optimálna cena je tak stanovená asi z 2/3 váhou vpred-hľadiacimi firmami.

Otvorenosť ekonomiky daná parametrom  $\alpha = 0.27$  je nižšia ako sme predpokladali (0.575). Jednou z možností je nahodnotená apriórna hodnota, ktorá by mohla zodpovedať skôr podielu importov na HDP Českej republiky (0.476). Referenčná literatúra však uvádza aj spôsob nastavenia prioru ako podiel exportu ku výstupu, ktorý sme volili aj my. Druhou možnosťou je, že zmeny cien v zahraničí nemajú až taký vplyv na zmenu cien v Českej republike (viď rovnica 1.24).



Obr. 3.1: Štrukturálne parametre a parametre Taylorovho pravidla

## Taylorove pravidlo monetárnej politiky

Vyhodnotená rovnica Taylorovho pravidla 1.87 s odhadnutými koeficientami z tabuľky 3.4 má nasledovný tvar:

$$r_t = 0.7 r_{t-1} + 0.75 \pi_{H,t} + 0.144 \tilde{y}_t + 0.012 e_t + \varepsilon_t^v,$$

pričom hustoty na obrázku 3.1 implikujú dobrú identifikovateľnosť a významnosť parametrov.

Z rovnice vidíme, že parameter zotrvačnosti úrokovej miery zaručuje jej výrazné vyhladzovanie, t. j. budúca hodnota úrokovej miery je zo 70% daná tou minulou.

Najmarkantejší vplyv má citlivosť na zmeny v domácej inflácii (až 5 násobne vyšší ako citlivosť na medzeru výstupu a 62 krát vyšší ako citlivosť na zmenu kurzu), čo je v súlade s inflačným cieľovaním ČNB.

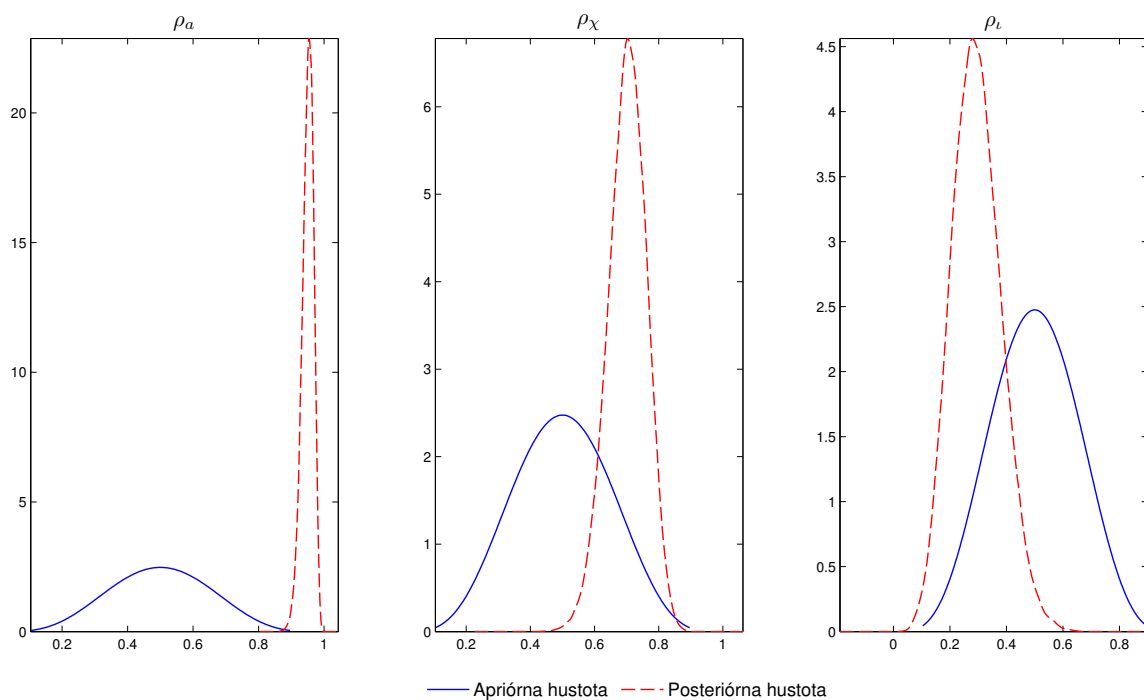
Ak by prírastok inflácie činil 1%, tak úroková miera narastie o 0.75%, aby infláciu utlmila. Rovnako, ak by bola medzera výstupu rovná hodnote 1%, úroková miera narastie o 0.14% v snahe zabrániť možnému prehriatiu ekonomiky. Citlivosť na zmenu výmenného kurzu je síce nízka, ale významná (viď interval HPD v tabuľke 3.4). Jednopercentná deprecia domácej meny<sup>6</sup> by znamenala rast úrokovej sadzby o 0.012%.

## Perzistencia AR(1) procesov a smerodajné odchýlky šokov

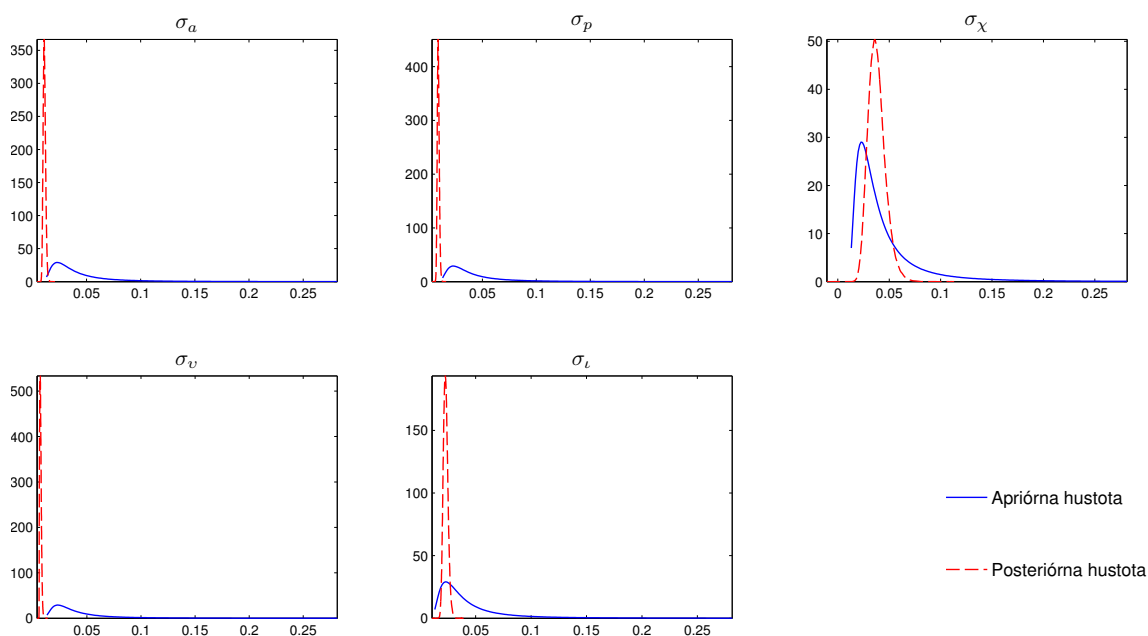
Najvyššiu zotrvačnosť evidujeme u šoku v produktivite, až na úrovni  $\rho_a = 0.95$ . O niečo menej perzistentný je nefundamentálny šok  $\rho_\chi = 0.7$  a ešte menej šok v rizikovej prémii  $\rho_l = 0.3$ , čo je dokonca menej ako apriórna informácia. Z pohľadu na graf posteriorných a apriorných hustôt na obrázku 3.2 usudzujeme dobrú identifikovateľnosť týchto koeficientov.

Pre smerodajné odchýlky šokov vykreslené na obrázku 3.3 všeobecne platí, že čím je šok volatilnejší (vyššie hodnoty parametrov), tým pravdepodobnejšie bude intenzívnejší. Najvolatilnejší je šok  $\sigma_\chi = 0.0378$  a hneď po ňom šok v rizikovej prémii  $\sigma_l = 0.0229$ . Šok v produktivite sa javí nižší,  $\sigma_a = 0.011$  a ešte nižšie hodnoty dosahuje volatilita monetárneho šoku  $\sigma_v = 0.007$  a nákladového šoku  $\sigma_p = 0.009$ . Kalibrované šoky zahraničnej ekonomiky (viď tabuľka 3.2) indikujú nízku volatilitu (každý z nich pod úrovňou 0.01).

<sup>6</sup>modelujeme kurz ako počet korún za euro, čiže ide o tzv. priamu kotáciu – t. j. rast kurzu znamená depreciaцию meny



Obr. 3.2: Parametre perzistencie AR(1) procesov



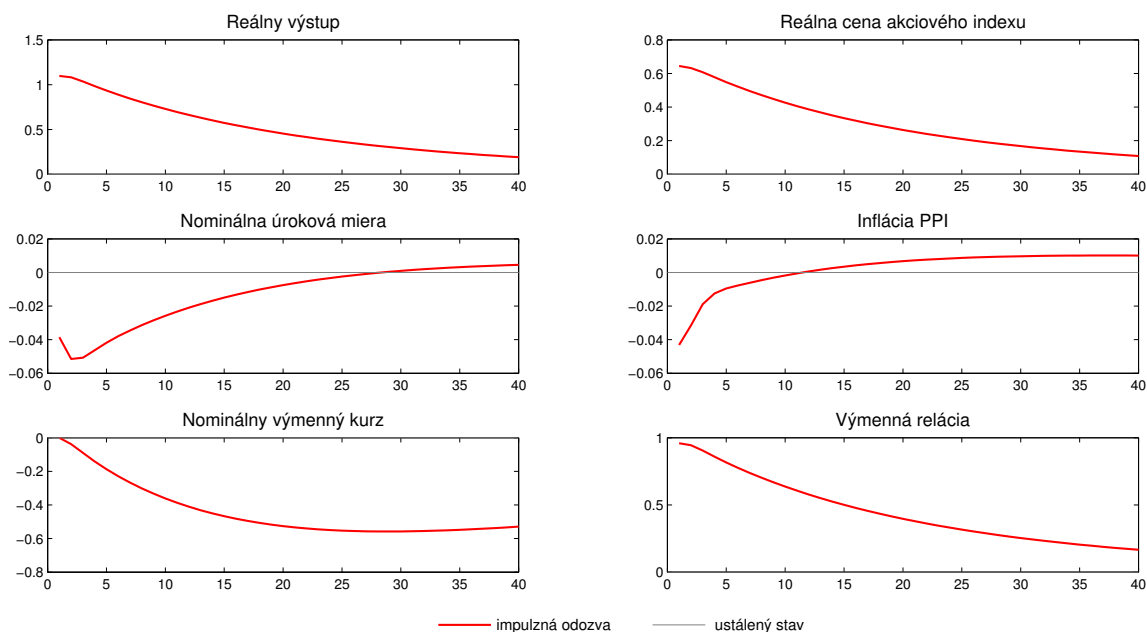
Obr. 3.3: Smerodajné odchýlky exogénnych šokov

### 3.4 Impulzné odozvy

Impulzné odozvy zachytávajú reakcie endogénnych premenných na exogénne šoky v zmysle *ceteris paribus*, teda napr. čo by sa stalo, keby došlo k šoku v produktivite a nič iné by sa nezmenilo? Ďalšou otázkou, ktorú si kladieme je, ako dlho sa ekonomika bude otriasať z takého šoku, resp. po akej dobe sa vráti do ustáleného stavu<sup>7</sup>. Konkrétny počet období môžeme sledovať na x-ovej osi. Grafy impulzných odoziev zobrazené na nasledovných obrázkoch zobrazujú vývoj premennej po zásahu kladným šokom vo veľkosti jednej smerodajnej odchýlky daného šoku.

#### Impulzná odozva na šok v produktivite

Graf impulzných odoziev je vykreslený na obrázku 3.4. Šok v domácej produktivite pochopiteľne zvýši domáci výstup cca o 1% a aj cenu akciového indexu asi o 0.6%. Oba efekty sú dlhodobé a odznejú až po vyše 40 obdobiach. Rast produktivity zrejme znižuje náklady firiem, čo sa zobrazí na poklese ich cien a to nepatrne zníži aj domácu infláciu PPI. Výmenná relácia, ako rozdiel zahraničnej a domácej inflácie, vplyvom poklesu inflácie PPI rastie a na toto všetko reaguje centrálna banka znížením úrokovej sadzby v snahe zabrániť deflácií. Podmienka UIP (za nemenného stavu zahraničnej úrokovej miery) pri poklese domácej úrokovej miery spôsobí apreciaciu domácej meny (vidíme záporný prírastok kurzu, nakoľko ide o priamu kotáciu – domáca mena za jednotku zahraničnej). Šok v produktivite je dosť perzistentný a jeho vplyv sa javí byť dlhotrvajúci.



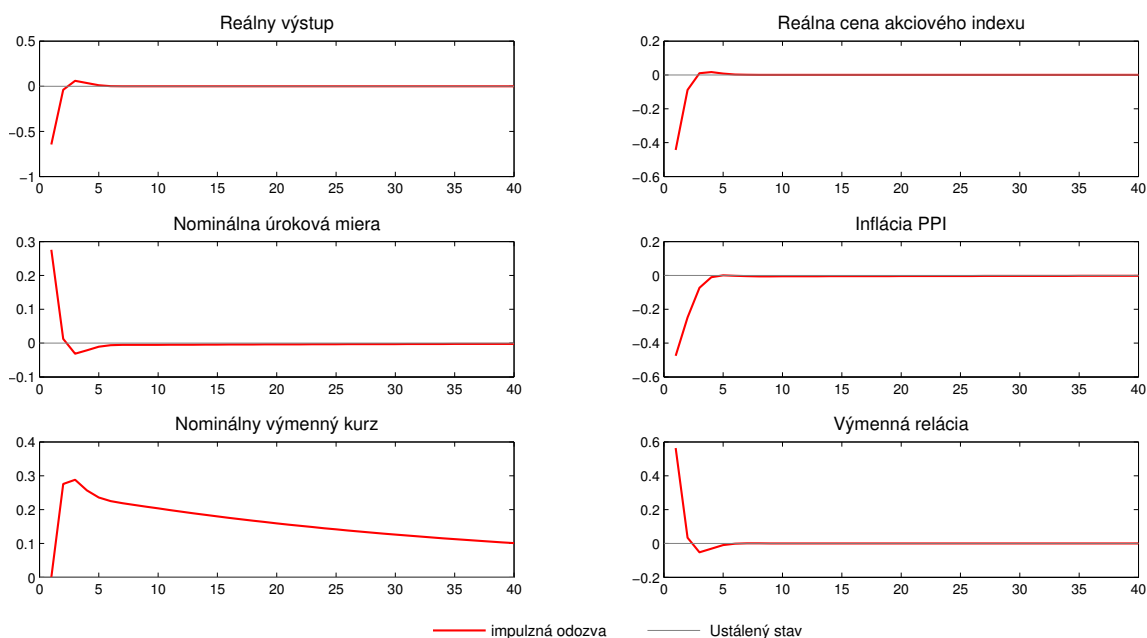
Obr. 3.4: Impulzná odozva na šok v produktivite (%)

<sup>7</sup>model je stacionarizovaný, takže šoky zachytávajú len dočasné krátkodobé zmeny a po určitom čase sa trajektória vráti do ustáleného stavu

### Impulzná odozva na monetárny šok

Teória tvrdí, že zásah ekonomiky pozitívnym monetárnym šokom, napr. náhle zvýšenie úrokovej miery, zníži ochotu spotrebovať statky, lebo ľudia radšej sporia<sup>8</sup>. Tým poklesne aj výstup a ekonomika sa pomaly pribzďuje. Dôsledkom je zníženie agregátneho dopytu po statkoch, čo znižuje ceny, teda vnímame nižšiu domácu infláciu. S výkonom ekonomiky je spätý aj vývoj na burze, ktorý tiež zaznamenáva nepriaznivý priebeh. Predpoklad UIP sa pri rastúcej domácej a nemennej zahraničnej úrokovej miere premietne v následnej depreciácii domácej meny.

Impulzné odozvy z obrázka 3.5 sú v súlade s týmto teoretickým konceptom. Pomocou neho vie centrálna banka vykonávať reštriktívnu menovú politiku (v opačnom prípade, keď ide o negatívny monetárny šok, hovoríme o expanzívnej menovej politike). Suma sumárum, monetárny šok o veľkosti 1 smerodajnej odchýlky zaistí prepad HDP a indexu PX okolo 0.5%, rast nominálnej úrokovej miery a kurzu cca o 0.3% a pokles domácej inflácie o 0.4%. S poklesom domácej inflácie naopak rastie výmenná relácia. Monetárny šok vyprcháva rýchlo vďaka svojej nízkej zotrvačnosti.

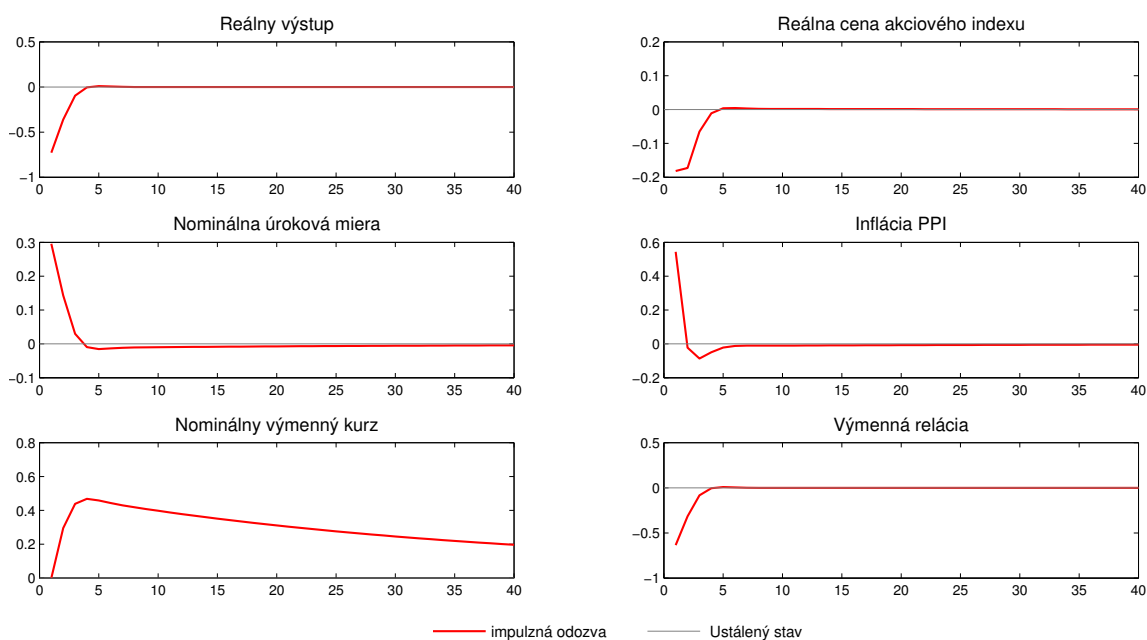


Obr. 3.5: Impulzná odozva na monetárny šok (%)

### Impulzná odozva na nákladový šok

Vplyv nákladového šoku o intenzite jednej smerodajnej odchýlky má tendenciu znižovať výstup domácej ekonomiky o zhruba 0.75% a index PX o 0.2%. Evidujeme nárast inflácie PPI o skoro 0.6%, spôsobený kladným pôsobením šoku na rast cien výrobcov. To sa premietne v poklese výmennej relácie. Nominálna úroková miera, ako súčet reálnej úrokovej miery a inflácie, sa tiež zvýši. UIP dá v ďalších obdobiach impulz k depreciácii kurzu asi o 0.5%. Po zhruba jednom roku sa situácia stabilizuje a ekonomika sa vráti do rovnováhy.

<sup>8</sup>reálny výnos rastie dvoma faktormi – zvyšujú sa nominálne úrokové miery a zároveň klesá inflácia



Obr. 3.6: Impulzná odozva na nákladový šok

### 3.5 Šokové dekompozície

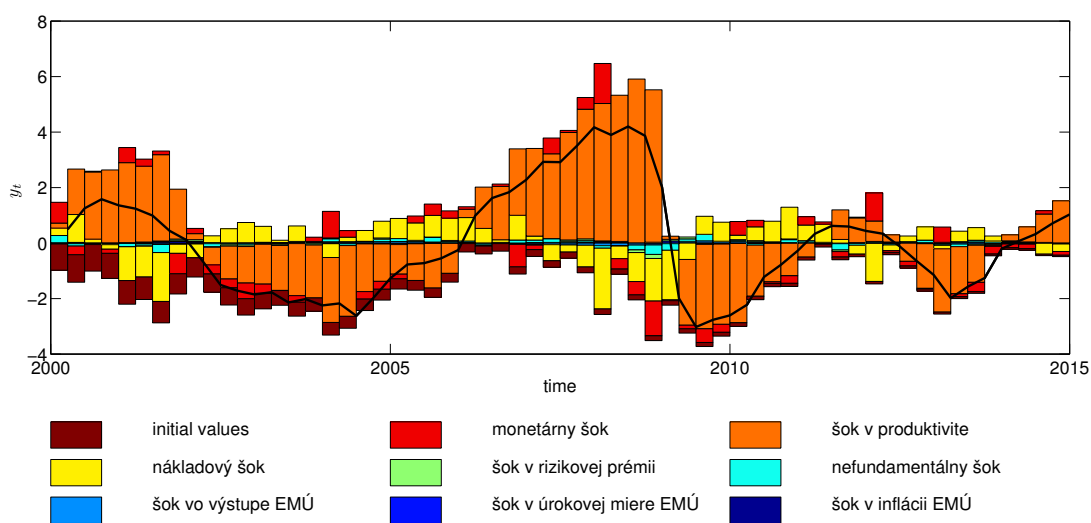
Vďaka historickým šokovým dekompozíciám vieme zachytávať vplyv vyhladených exogénnych šokov na vývoj trajektórií vyhladených endogénnych premenných<sup>9</sup>. Presnejšie ide o rozklad rozptylu danej premennej na príspevky rôznych exogénnych šokov. Prívlastok „historická“ si táto metóda zaslúžila preto, lebo nám umožňuje pozorovať účinky každého šoku v rôznych minulých obdobiach. Pomocou stĺpcových grafov šokových dekompozícií, kde sú vynesené aj vyhladené trajektórie daných premenných, zanalyzujeme kľúčové makroekonomické veličiny českej ekonomiky. Menovite pôjde o reálny výstup a infláciu CPI. Analýza týchto údajov je väčšinou veľmi plodná, pretože umožňuje identifikovať hlavné zdroje konkrétnych „boomov“ a recesií.

#### Šoková dekompozícia domáceho výstupu

Priamo z grafu 3.7 plynie, že z najväčšej časti vysvetľuje variabilitu českého HDP šok v produktivite. Bolo tomu tak v obdobiach poklesu, kedy reálne došlo k zníženiu spotreby domácností a výstupu firiem (trajektória šoku na obrázku C.4 v záporných hodnotách), ale aj v období rastu, kedy naopak produkcia firiem stúpala (realizuje sa kladný šok). Tento šok sa dá chápať aj ako šok v ponuke tovarov a služieb domácich firiem.

Volatilitu výstupu mierne ovplyvnil aj monetárny šok. Ak napr. porovnáme graf šokovej dekompozície s trajektóriou monetárneho šoku z obrázku C.4, môžeme si všimnúť, že v obdobiach kladného monetárneho šoku (napr. v roku 2003) sa tento šok podieľal na variabilite výstupu negatívne. Naopak, v obdobiach záporného monetárneho šoku (rok 2008) sledujeme stimuláciu výstupu. Toto konštatovanie je v súlade s teóriou – záporný monetárny šok znamená expanzívnu menovú politiku a naopak.

<sup>9</sup>podotýkame, že vyhladené trajektórie a skutočné hodnoty z dát pozorovaných veličín sú totožné

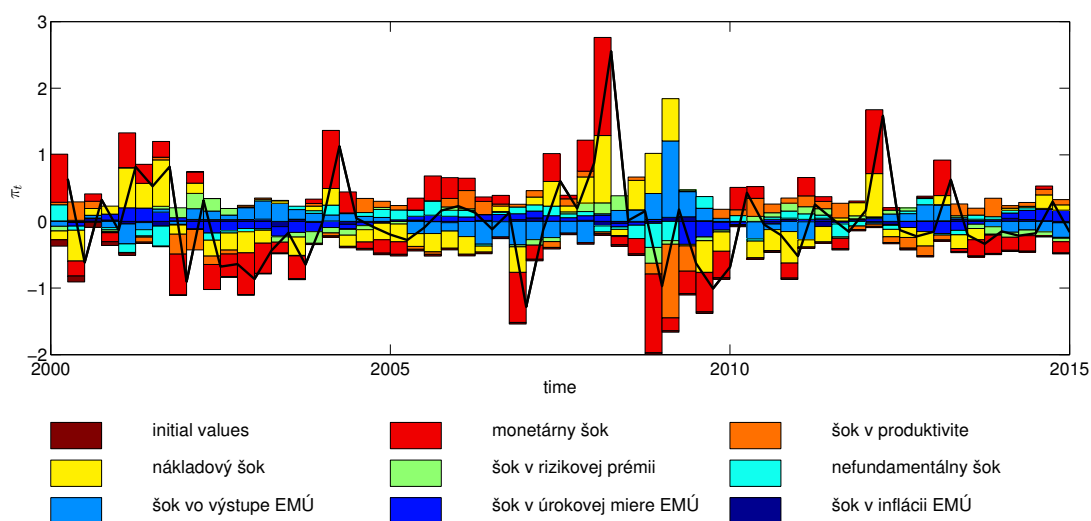


Obr. 3.7: Historická šoková dekompozícia: Výstup (% odchýlky)

U nákladového šoku sledujeme rovnaké nepriamoúmerné pôsobenie ako u monetárneho. Pozitívny nákladový šok v podobe rastu nákladov pochopiteľne znižuje výstup, nízke náklady výstup zvyšujú.

Čo je mierne zarážajúce a je aj v rozpore s empirickými výsledkami iných prác – náš model tvrdí, že na domáce HDP nemajú zahraničné šoky žiaden vplyv. Na to sme tiež našli vysvetlenie. Medzi šokom v produktivite a šokom v zahraničnom výstupe je pozorovaná výrazná korelácia až 64% (viď tabuľka B.7). Rovnako je tomu aj vtedy, keď vezmeme do úvahy korelácie šoku v produktivite so šokom v zahraničnej inflácii a so šokom v úrokovej miere, kde sa hodnoty pohybujú na úrovni cca. 69%, resp. 20%. Je teda pravdepodobné, že tieto šoky sú už z veľkej časti zahrnuté v šoku v domácej produktivite.

### Šoková dekompozícia domácej inflácie



Obr. 3.8: Historická šoková dekompozícia: Inflácia CPI (% odchýlky)

Analýza šokovej dekompozície inflácie je obtiažna, pretože naša transformácia hrubej miery inflácie spôsobila výrazne kolísavý priebeh krivky. Napriek tomu môžeme na obrázku 3.8 pozorovať, že za kladné odchýlky inflácie od ustáleného stavu sa najviac podpísal kladný nákladový šok a záporný monetárny šok a to hlavne v roku 2009 a 2012. Môžeme si tiež všimnúť, že devízová intervencia ČNB z novembra 2013 sa zrejme premietla v podobe monetárneho šoku do mierneho vychýlenia inflácie smerom nahor.

Inflácia bola po kríze čiastočne stabilizovaná aj zahraničným rastom výstupu, no negatívny šok v domácej produktivite tento rast tlmil. Z grafu za zdá, že inflačné šoky v Eurozóne majú na domácu infláciu minimálny vplyv. Podobne je tomu tak aj u nečakaných pohybov v zahraničnej úrokovvej miere.

### 3.6 Simulované a skutočné momenty

V časti 2.4 sme popísali priebeh série simulácií, za pomoci ktorého môžeme získať modelové momenty a porovnať ich s tými z dát. Napriek tomu, že získame modelové charakteristiky aj pre nepozorované premenné, zaujímať nás budú iba pozorované, nakoľko len tie je možné porovnať so skutočnými dátami. Vynecháme aj zahraničnú ekonomiku, pretože predpokladáme jej exogénny vývoj. Tým pádom nás budú zaujímať len premenné:  $y_t$ ,  $r_t$ ,  $q_t$ ,  $\pi_t$ ,  $e_t$ .

Výsledky tohto procesu pre priemerné hodnoty sú zaznamenané v tabuľke 3.5. Dátový priemer každej premennej je rovný nule, za čo môže transformácia dát na odchýlky od ustálených stavov – tie sú v priemere nulové. Vidíme, že priemery z dát všetkých 5 premenných sú veľmi podobné simulovaným a všetky ležia v príslušnom 90% simulovanom intervale spoľahlivosti. Z hľadiska priemerov je model úspešný.

	$y_t$	$r_t$	$q_t$	$\pi_t$	$e_t$
Dátový priemer	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Simulovaný priemer	-0.26	0.02	-0.98	0.02	-0.36
Simulovaný kvantil 0.05	-4.63	-0.56	-7.52	-0.57	-19.36
Simulovaný kvantil 0.95	3.35	0.54	5.02	0.61	19.22

Tabuľka 3.5: Porovnanie dát s modelom: Priemer (%)

Pre smerodajné odchýlky z tabuľky 3.6 už podobné závery neplatia. Model tieto charakteristiky nereplikoval v súlade s realitou. U skoro všetkých premenných je simulovaná variabilita premenných väčšia ako variabilita dát. Výnimkou je len reálna cena indexu PX.

	$y_t$	$r_t$	$q_t$	$\pi_t$	$e_t$
Dátová s. o.	1.89	0.15	20.10	0.63	3.11
Simulovaná s. o.	2.92	0.43	13.93	0.89	8.84
Simulovaný kvantil 0.05	2.06	0.35	10.19	0.73	5.09
Simulovaný kvantil 0.95	4.34	0.56	17.56	1.08	14.41

Tabuľka 3.6: Porovnanie dát s modelom: Smerodajná odchýlka (%)

Ďalšou porovnávanou charakteristikou je autokorelácia až do stupňa  $p = 5$ , ktorá je kľúčová pri hodnotení dynamiky modelu. Výsledky sú obsahom tabuľky 3.7. Úspešnosť modelu v zmysle „trafenia“ sa skutočnej hodnoty do simulovaného intervalu spoľahlivosti je 60%. Sklamali najmä autokorelácie prvého stupňa, ktoré model s výnimkou výmenného kurzu mierne podhodnotil. Ostatné údaje vykazujú uspokojivé výsledky (hodnoty blízko seba s rovnakým znamienkom) až na výmenný kurz, kde sa hodnoty hlavne pre  $p = 3, 4, 5$  výrazne líšia.

	$p$	$y_t$	$r_t$	$q_t$	$\pi_t$	$e_t$
Dátová AC	1	0.92	0.88	0.88	0.88	0.79
Simulovaná AC	1	0.80	0.55	0.62	0.19	0.91
Dátová AC	2	0.74	0.69	0.56	0.09	0.32
Simulovaná AC	2	0.66	0.33	0.37	0.08	0.80
Dátová AC	3	0.54	0.47	0.35	-0.08	0.03
Simulovaná AC	3	0.55	0.25	0.20	0.05	0.69
Dátová AC	4	0.33	0.24	0.16	0.03	-0.16
Simulovaná AC	4	0.46	0.21	0.10	0.02	0.59
Dátová AC	5	0.12	0.02	0.02	-0.35	-0.27
Simulovaná AC	5	0.38	0.20	0.05	0.02	0.50

podčiarknutý údaj neleží v simulovanom intervale spoľahlivosti  
 $p$  značí stupeň oneskorenia a CI interval spoľahlivosti

Tabuľka 3.7: Porovnanie dát s modelom: Autokorelácie

Vcelku úspešné hodnotenie modelu ponúka aj tabuľka 3.8, kde vidíme vzájomný vzťah simulovaných a dátových trajektórií. Všetky modelové a reálne korelácie sú si veľmi podobné. Významne sa líši len korelácia medzi výstupom a úrokovou mierou. To môže byť spôsobené faktom, že v modeli pokles úrokovej miery síce posilní výstup, no pohľad na súbežný pohyb odchýlok úrokových sadzieb a výstupu od svojich ustálených stavov (viď C.3) vykazuje protichodný priebeh. Za použitia netransformovaných dát je korelácia medzi HDP a sadzbou 3-m PRIBOR rovná  $-0.66$  (viď C.2), čo už modelu zodpovedá viac.

	$y_t$	$r_t$	$q_t$	$\pi_t$	$e_t$
$y_t$	1   1	0.68   -0.64	0.49   0.43	0.33   -0.01	-0.24   0.13
$r_t$		1   1	-0.09   -0.28	0.25   0.08	-0.27   -0.57
$q_t$			1   1	0.27   0.08	0.13   -0.03
$\pi_t$				1   1	0.07   -0.22
$e_t$					1   1

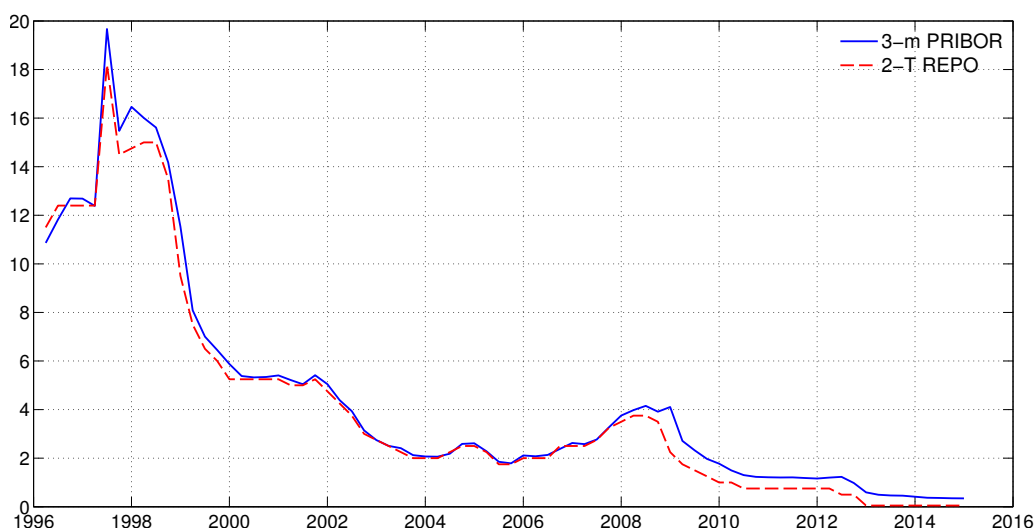
podčiarknutý údaj neleží v simulovanom intervale spoľahlivosti  
korelácie z dát na ľavej strane; simulované korelácie na pravej strane

Tabuľka 3.8: Porovnanie dát s modelom: Korelácie

## Kapitola 4

# Analýza monetárnych nástrojov

Naším hlavným záujmom a cieľom tejto práce je prieskum monetárnej autority v Českej republike, teda činnosť ČNB. Ústava ČR a zákon o ČNB kladie stabilitu cenovej hladiny za hlavný cieľ ČNB. K tomu má banka v tandeme viacero nástrojov a donedávna to boli hlavne základné úrokové sadzby – 2 týždňová REPO sadzba, lombardná a diskontná sadzba. Tieto menovopolitické sadzby a tržná úroková miera PRIBOR idú ruka v ruke, o čom sa môžeme presvedčiť na obrázku 4.1.



Obr. 4.1: Úrokové sadzby Českej republiky (% p. a.)

Ich pozvoľný pokles v priebehu času (s výnimkou roku 1997<sup>1</sup>) začal už v roku 1995. Po roku 2005 to vyzeralo na opätovný rast sadziieb z necelých 2% až na cca 4% začiatkom roka 2008. Avšak po príchode veľkej recesie už ČNB v zúfalej snahe stabilizovať ekonomické prostredie sadzbu len rapídne znižovala na hodnoty blízke nule. Momentálne je už tretí rok (od konca roka 2012) 2–T REPO sadzba fixovaná na úrovni 0.05%. Naskytuje sa teda otázka, do akej miery je v súčasnosti tento nástroj menovej politiky ako stimul na rast HDP a inflácie účinný.

<sup>1</sup>Rok 1997 bol špecifický z toho hľadiska, že sa odohrával boj medzi ČNB a tzv. menovými džermi, ktorí predajom veľkého množstva CZK nakrátko za marky alebo doláre oslabovali korunu s myšlienkou, že ju neskôr kúpia lacnejšie a dlhy vyrovnajú. Reakciou centrálnej banky boli mimoriadne nárasty úrokových sadziieb so snahou stabilizovať túto situáciu.

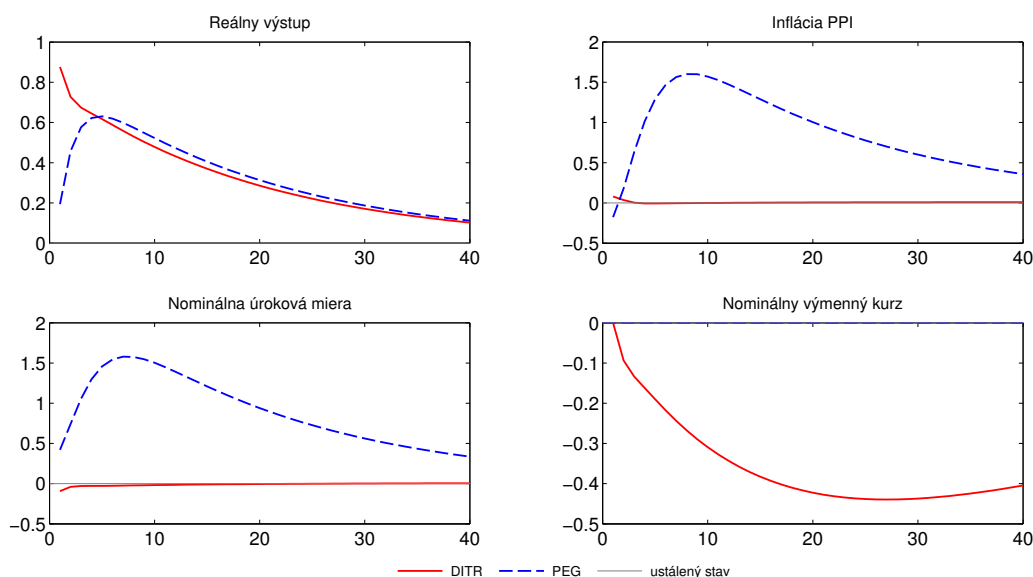
ČNB si je uvedeného problému vedomá a v novembri 2013 sa pomocou devízových intervencií zaviazala udržiavať kurz CZK/EUR blízko hodnoty 27. Samotná banka uvádza, že ide o snahu významne obmedziť riziko deflácie a urýchliť návrat do situácie, kedy bude ČNB môcť opäť začať používať svoj štandardný nástroj, t. j. úrokovej sadzby. Je potrebné zdôrazniť, že sa kurz koruny nestal novým menovo–politickým cieľom, iba jej súčasným nástrojom používaným k plneniu inflačného cieľa. [32]

Predošlé konštatovanie nás inšpirovalo k analyzovaniu dvoch monetárnych režimov. Prvá verzia (DITR – *domestic inflation Taylor rule*) sa zhoduje s odhadnutým modelom A.5. Druhá verzia modelu (PEG – fixný kurz) sa líši len v jednej rovnici, t. j. Taylorove pravidlo 1.87 je nahradené alternatívnou špecifikáciou monetárnej politiky – rovnicou 1.88, ktorá fixuje nominálny kurz. Táto analýza je spravená na základe simulovaných hodnôt za použitia techniky popísanej v časti 2.4. Môžeme ju chápať skôr ako hypotetické scenáre dvoch režimov, ktoré nie sú v budúcnosti vylúčené.

## 4.1 Simulované impulzné odozvy

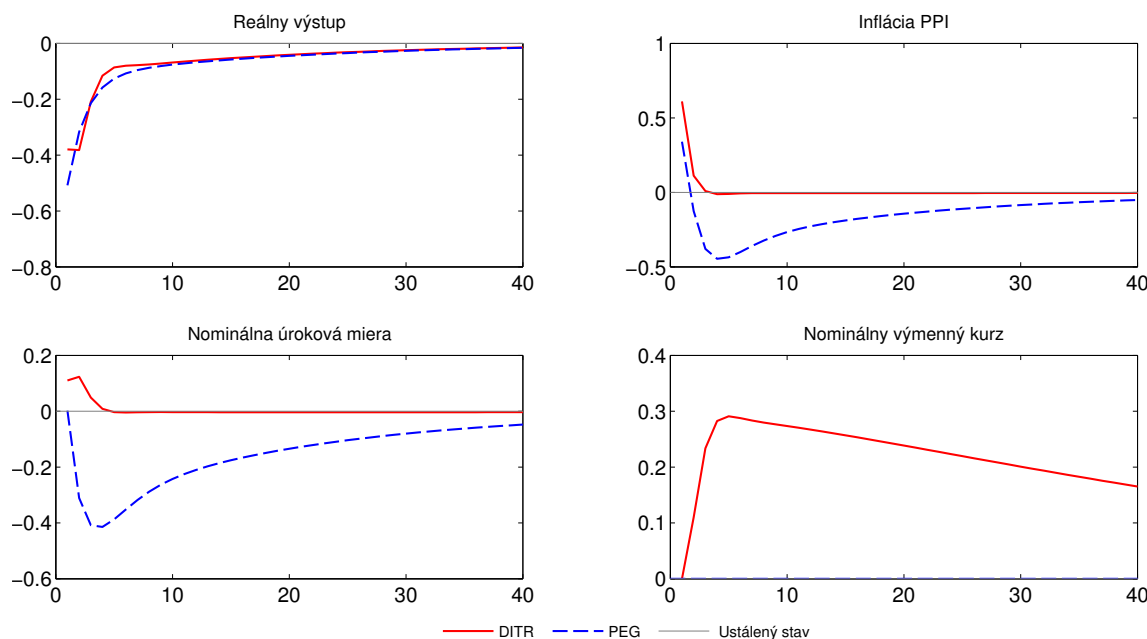
Pomocou simulovaných impulzných odoziev porovnáme vplyv šoku v produktivite a nákladového šoku na vybrané veličiny. Pripomeňme, že pri režime DITR používa centrálna banka k dosiahnutiu svojho cieľa úrokovú sadzbu. Pri režime fixného kurzu zase predpokladáme nemenný kurz, ktorý vie centrálna banka dosiahnuť nákupom (oslabovanie domácej meny) alebo predajom (posilňovanie domácej meny) zahraničnej meny.

Na ku 4.2 je načrtnutý vplyv šoku v produktivite (môžeme chápať aj ako šok v ponuke domácich firiem). Domáca ekonomika napreduje v oboch prípadoch, čo vidíme na raste reálneho výstupu. Za platnosti režimu DITR je rast cien v porovnaní s režimom PEG nepatrný (rastie síce výstup, spotreba a ceny, no klesajúce náklady firiem zrejme tento rast utlmia) a šok sa prejaví v apreciácii domácej meny. Režim PEG vykazuje výraznejší rast domácej inflácie a to zrejme kvôli znemožnenému zhodnoteniu kurzu. Okrem rastu inflácie pozorujeme aj rast nominálnej úrokovej miery.



Obr. 4.2: Impulzná odozva na šok v produktivite (%)

Obrázok 4.3 zachytáva vplyv nákladového šoku. V oboch prípadoch pozorujeme prepád domáceho výstupu. Za platnosti režimu DITR vyššie náklady firiem zvyšujú cenu ich produktov a v globále aj infláciu PPI. Následkom toho sledujeme mierny rast úrokovej miery, ako nástroja k utlmeniu inflácie a depreciáciu kurzu, ako implikáciu z podmienky UIP. Pri PEG režime sa síce zo začiatku zdvihnú ceny vplyvom rastúcich nákladov, ale asi po uplynutí dvoch období ceny výraznejšie poklesnú. Podobne reaguje aj nominálna úroková miera. Ak chce centrálna banka zabrániť defláciu a pritom nemá možnosť použiť nominálne úrokové sadzby, je nutné aby došlo k depreciácii kurzu.



Obr. 4.3: Impulzná odozva na nákladový šok (%)

## 4.2 Simulované momenty

V tejto časti sa pokúsime porovnať momenty zo simulovaných modelov DITR a PEG. Výsledky modelu PEG je nutné brať s určitým nadhľadom. Naším cieľom nie je presné kvantitatívne vyjadrenie premennej, len akási zmena v zmysle: „Čo by sa mohlo stať, keď centrálna banka opustí nástroj úrokových sadzieb a začne raziť politiku fixného kurzu nasledovných 15 rokov?“. Skreslenie výsledkov režimu PEG je spôsobené faktom, že je model simulovaný s odhadnutými parametrami a šokmi z modelu DITR.

Výsledky priemerných odchýlok od ustálených stavov aj so smerodajnými odchýlkami zo simulovaných modelov zachytáva tabuľka 4.1. Pohľad na smerodajné odchýlky nás núti konštatovať, že simulované momenty PEG modelu sú dosť „divoké“, čo je pravdepodobne dané tým, že inflácia a nominálna úroková miera nie sú v modeli správne v modeli determinované. Napriek tomu sa zdá, že reálna úroková miera ( $r_t - \pi_t$ ) vykazuje správne výsledky. Vidíme že priemerná hodnota jej odchýlky od rovnováhy je cca 1.2%, čo už je o čosi priaznivejší a reálnejší výsledok. Priemerná odchýlka výstupu od ustáleného stavu v PEG modeli je rovnako ako v modeli DITR záporná, ale o niečo viac. Priemerná odchýlka od rovnováhy ceny PX indexu v PEG modeli je vo výške 3.5%.

	$y_t$	$r_t$	$q_t$	$\pi_t$	$e_t$
<u>Priemer</u>					
DITR model	-0.26	0.02	-0.98	0.02	-0.36
PEG model	-2.02	-19.63	3.50	-20.45	0
<u>Smerodajná odchýlka</u>					
DITR model	2.92	0.43	13.93	0.89	8.84
PEG model	144.66	569.48	207.76	522.76	0

Tabuľka 4.1: Porovnanie monetárnych režimov: Priemer (%)

Porovnanie dynamiky modelov sa ponúka prostredníctvom tabuľky 4.2, ktorá obsahuje autokorelačné koeficienty s rôznymi oneskoreniami. Výstup ani cena indexu v modeli PEG nevykazujú v porovnaní s modelom DITR skoro žiadnu dynamiku. Naopak vyššia dynamika je zaznamenaná u inflácie a úrokovej miery.

	$p$	$y_t$	$r_t$	$q_t$	$\pi_t$	$e_t$
DITR model	1	0.80	0.55	0.62	0.19	0.91
PEG model	1	0.11	0.71	0.27	0.87	–
DITR model	2	0.66	0.33	0.37	0.08	0.80
PEG model	2	-0.04	0.52	0.08	0.65	–
DITR model	3	0.55	0.25	0.20	0.05	0.69
PEG model	3	-0.04	0.35	0.03	0.44	–
DITR model	4	0.46	0.21	0.10	0.02	0.59
PEG model	4	-0.04	0.20	-0.01	0.25	–
DITR model	5	0.38	0.20	0.05	0.02	0.50
PEG model	5	-0.06	0.08	-0.05	0.11	–

Tabuľka 4.2: Porovnanie monetárnych režimov: Autokorelácie

Posledným skúmaným faktorom pri porovnávaní režimov sú korelačné koeficienty z tabuľky 4.3. Na rozdiel od modelu DITR, ktorý vykazoval záporný vzájomný vzťah výstupu a úrokovej miery, PEG naznačuje nezávislosť týchto veličín. Takisto tvrdí, že inflácia nie je nezávislá na vývoji výstupu a úrokovej miery (ako v modeli DITR), ale vyvíja sa rovnakým smerom. V tomto smere je model PEG paradoxne bližšie súčasnej realite.

DITR   PEG	$y_t$	$r_t$	$q_t$	$\pi_t$
$y_t$	1 1	-0.64 0.06	0.43 0.53	-0.01 0.61
$r_t$		1 1	-0.28 -0.78	0.08 0.8
$q_t$			1 1	0.08 -0.25
$\pi_t$				1 1

Tabuľka 4.3: Porovnanie monetárnych režimov: Korelácie

# Záver

Cieľom tejto práce bolo zhodnotiť rolu centrálnej banky v Českej republike za obdobie 2000–2015 a priblížiť najnovšie trendy monetárnej politiky. Pre tento účel bol vybudovaný dynamický stochastický model všeobecnej ekonomiky malej otvorenej ekonomiky za pomoci článku Funke, Paetz a Pytlarczyk (2011) [13]. Tento model bol v niektorých oblastiach mierne upravený, aby viac priblížil charakteristiky českého ekonomického prostredia. Jedná sa najmä o nahradenie režimu fixného kurzu, modelovaného v pôvodnom článku, Taylorovým pravidlom, ktoré *ad-hoc* predpokladá citlivosť úrokových mier na zmeny v inflácii, HDP či výmennom kurze. Domnievame sa, že toto pravidlo dokáže presnejšie zachytiť historický vývoj monetárnej politiky až do roku 2012. Až do tohto obdobia sme mohli byť svedkami používania menovopolitických úrokových mier ako hlavného nástroja ČNB v boji s cenovou nestabilitou a nepriaznivým vývojom ekonomického prostredia.

DSGE model bol úspešne odhadnutý netriviálnymi Bayesovskými technikami, ktoré sú ako vyšité na odhady tohto druhu. Kombinujú totiž apriórnu informáciu, ktorá do modelu vnára akýsi expertný názor o podobe parametrov, so skutočnými pozorovanými trajektóriami makroekonomických veličín reprezentujúcich ekonomiku. Nami získané posteriórne odhady korešponujú s výsledkami hlásenými v referenčnej literatúre podobného druhu. Podrobne boli vďaka impulzným odozvám preskúmané aj reakcie veličín na nečakané šoky zasahujúce ekonomiku a šokovými dekompozíciami boli kvantifikované príspevky jednotlivých šokov na trajektórie premenných v jednotlivých obdobiach. Porovnaním simulovaných a skutočných momentov sme tiež ukázali dostatočnú kvalitu modelu.

Spomenieme hlavne kľúčové odhady sledovaných parametrov, ktorými sú koeficienty monetárneho pravidla Taylorovho typu. Uvedené pravidlo naznačuje, že v sledovanom období boli v snahe vyhladeného priebehu trajektórie tvorené úrokové miery zo 70% svojimi minulými hodnotami a z 30% ho tvorila nová informácia o zmenách kľúčových premenných – inflácie, výstupu a výmenného kurzu. v našom modeli sa potvrdilo, že najväčšiu váhu kladie centrálna banka pri svojich rozhodnutiach práve na odchýlky v inflácii. Dané v číslach – ak by zmena v inflácii medze dvoma obdobiami zodpovedala 1% poklesu, ČNB by sa snažila úrokovú mieru znížiť o cca 0.75% v snahe povzbudiť verejnosť k vyššej spotrebe a firmy k vyšším investíciám.

Podobný priebeh expanzívnej monetárnej politiky, aký bol práve ilustrovaný príkladom, sme mohli vnímať v období veľkej recesie z konca roka 2008, kedy padali úrokové sadzby nie len v Českej republike, ale šlo o celosvetový trend. Následne sa však vyskytol problém v podobe nulovej spodnej medzi úrokových sadzieb (presnejšie ide o hodnotu 2–T REPO sadzby na úrovni 0.05%), kombinovanej s dlhovou krízou, zlou situáciou na trhu nehnuteľností, neutíchajúcou potrebou uvoľnenej menovej politiky a ďalšej deflačnej hrozby<sup>2</sup>. K vyriešeniu tohoto problému siahla v 2013

<sup>2</sup>dôvodom je hlavne nedostatočný agregátny dopyt – všeobecnou osobitou vlastnosťou českých spotrebiteľov je vysoký sklon k úsporám umocnený najmä v obdobiach recesie

monetárna autorita k alternatívnejmu riešeniu – jednosmernému kurzovému záväzku, ktorý nedovolí pokles výmenného kurzu pod hranicu 27 CZK/EUR.

To nás v poslednej kapitole práce inšpirovalo k experimentu, teda k porovnaniu dvoch hypotetických budúcich scenárov – cieľovania inflácie pomocou úrokových mier (platné do roku 2012) a cieľovania inflácie pomocou kurzového záväzku (platné od roku 2012 najmenej do roku 2016<sup>3</sup>). Ukázalo sa, že ku kvalitnejším výsledkom bude nutné ešte nejaký čas počkať a model s fixným kurzom aj odhadnúť, nie len simulovať.

---

<sup>3</sup>banková rada ČNB uviedla, že neukončí režim devízových intervencií skôr ako v roku 2016

# Literatúra

- [1] BAXA, J., PLAŠIL, M., VAŠÍČEK, B., 2015. *Changes in inflation dynamics under inflation targeting? Evidence from Central European countries*. *Economic Modelling* 44: 116-130.
- [2] BLANCHARD, O. J., 1985. *Debt, deficits, and finite horizons*. *Journal of Political Economy* 93, 223–247.
- [3] BLANCHARD, O. J., KAHN, Ch. M., 1980. *The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations*. *Econometrica*, vol. 48, issue 5. DOI: 10.2307/1912186.
- [4] CALVO, G., 1983. *Staggered prices in utility-maximizing framework*. *Journal of Monetary Economics* 12, 983–998.
- [5] CANOVA, F., 2007. *Methods for applied macroeconomic research*. Princeton: Princeton University Press, xiv, 492 s. ISBN 978-0-691-11504-7.
- [6] CARANINI, P., 2013. *Comparing monetary policy rules in CEE economies: A Bayesian approach*. *Economic Modelling* 32 : 233-246.
- [7] CLARIDA, R., GALÍ, J., GERTLER, M., 1999. *The science of monetary policy: a new Keynesian perspective*. *Journal of Economic Literature* 37, 1661–1701.
- [8] DALSGAARD, T., 2008. *Czech Republic: Selected issues*. Washington, DC : Internat. Monetary Fund.
- [9] DEJONG, P. N., DAVE, Ch., 2007. *Structural macroeconometrics*. Princeton: Princeton University Press, 2007. xiv, 338 s. ISBN 978-0-691-12648-7.
- [10] DIXIT, A. K., STIGLITZ, J.E., 1977. *Monopolistic competition and optimum product diversity*. *American Economic Review* 67, 297–308.
- [11] ENDERS, W., 2010. *Applied econometric time series*. 3rd ed. Hoboken, NJ: Wiley, xiv, 517 p. ISBN 04-705-0539-7.
- [12] FERNANDEZ, P., LINARES, P., FERNANDEZ, A. I., 2014. *Market risk premium used in 88 countries in 2014: A Survey with 8,228 Answers*. IESE Business School.
- [13] FUNKE, M., PAETZ, M. a PYTLARCZYK, E., 2011. *Stock market wealth effects in an estimated DSGE model for Hong Kong*. *Economic Modelling*. vol. 28, issue 1-2 s. 316–334, DOI: 10.1016/j.econmod.2010.08.016.
- [14] GALÍ, J., 2008. *Monetary Policy, Inflation and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework*. Princeton University Press.
- [15] GALÍ, J., GERTLER, M., 1999. *Inflation dynamics: A structural econometric analysis*. *Journal of monetary Economics*, 44(2), 195-222.
- [16] GALÍ, J., MONACELLI, T., 2005. *Monetary policy and exchange rate volatility in a small open economy*. *Review of Economic Studies* 72, 707–734.

- [17] GRIFFOLI, T. M., 2013. *Dynare user guide: An introduction to the solution and estimation of DSGE models*.
- [18] HEIJ, C., 2004. *Econometric methods with applications in business and economics*. New York: Oxford University Press, xxv, 787 p. ISBN 01-992-6801-0.
- [19] JONES, J. C., 2008. *Budgetary balances and restrictions in the European Monetary Union*. Diss. The University of North Carolina at Chapel Hill.
- [20] KOOP, G., 2003. *Bayesian econometrics*. Hoboken, N.J.: J. Wiley, xiv, 359 p. ISBN 04-708-4567-8.
- [21] LUBIK, T. A., SCHORFHEIDE, F., 2005. *A Bayesian look at new open economy macroeconomics*. In: Gertler, M., Rogoff, K. (Eds.), *NBER Macroeconomics Annual 2005*. MIT Press, Cambridge, pp. 313–366.
- [22] LUBIK, T. A., SCHORFHEIDE, F., 2007. *Do central banks respond to exchange rate movements? A structural investigation*. *Journal of Monetary Economics* 54, 1069–1087.
- [23] LUCAS, R. E., 1976. *Econometric policy evaluation: A critique*. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*. vol. 1, s. 19-46. DOI: 10.1016/s0167-2231(76)80003-6.
- [24] NISTICÓ, S., 2005. *Monetary policy and stock–price dynamics in a DSGE framework*. Libera Università Internazionale degli Studi Sociali - Guido Carli: LLEE Working Paper, 28. Rome.
- [25] PIERGALLINI, A., 2006. *Real balance effects and monetary policy*. *Economic Inquiry* 44, 497–511.
- [26] TVRZ, S., 2012. *Financial market frictions in economic crisis: DSGE model of the Czech economy*. Brno. Diplomová práce. Masarykova universita. Vedúci: prof. Ing. Osvald Vašíček, CSc.
- [27] URBAN, A., 2013. *Dopad finanční a hospodářské krize na monetární politiku USA a zemí Eurozóny*. Brno. Bakalářská práce. Masarykova universita. Vedúci: Ing. Daniel Němec, Ph.D.
- [28] WICKENS, M., 2012. *Macroeconomic Theory: A Dynamic General Approach to Macroeconomics*. 2nd ed, Princeton, NJ.: Princeton University Press.
- [29] YAARI, M. E., 1965. *Uncertain lifetime, life insurance, and the theory of the consumer*. *The Review of Economic Studies* 32, 137–150.

## Softvér

- [30] Dynare Toolbox: <http://www.dynare.org/>
- [31] LeSage Econometrics Toolbox: <http://www.spatial-econometrics.com/>

## Databázy

- [32] Česká národní banka: [www.cnb.cz](http://www.cnb.cz)
- [33] Český statistický úrad: [www.czso.cz](http://www.czso.cz)
- [34] Eurostat: <http://ec.europa.eu/eurostat>

# Appendix A

## Modelový appendix

### A.1 Appendix: Domácnosti

#### A.1.1 Maximalizácia úžitku podmienená rozpočtovým obmedzením

Domácnosti môžu voľiť len súčasnú spotrebu, množstvo práce a množstvo kúpených dlhopisov. Lagrangian podmienenej optimalizácie je tvaru:

$$\begin{aligned} L(C_t(j), N_t(j), B_{t+1}(j), Z_{t+1}(k, j), \lambda_t) = & E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (1 - \gamma)^t [\ln(C_t(j)) + \log(1 - N_t(j))] \right\} - \\ & - E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \lambda_t \left( C_t(j) + \frac{F_{t,t+1} B_{t+1}(j)}{P_t} + \int_0^1 \frac{\Xi_t^i}{P_t} F_{t,t+1} B_{t+1}^i(j) di + \int_0^1 \frac{Q_t(k) Z_{t+1}(k, j)}{P_t} dk - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{W_t}{P_t} N_t(j) + T_t(j) - \frac{\Omega_t(j)}{P_t} \right) \right\}, \end{aligned}$$

kde  $\lambda_t$  je lagrangeov multiplikátor a definícia nominálneho finančného bohatstva:

$$\Omega_t(j) \equiv \frac{1}{1 - \gamma} \left[ B_t(j) + \int_0^1 \Xi_t^i B_t^i(j) di + \int_0^1 (Q_t(k) + D_t(k)) Z_t(k, j) dk \right].$$

Upravený Lagrangian (pre prehľadnosť) pre obdobia  $t$  a  $t + 1$ :

$$\begin{aligned} L(C_t(j), N_t(j), B_{t+1}(j), Z_{t+1}(k, j), \lambda_t) = & E_t \left\{ \beta^t (1 - \gamma)^t [\ln(C_t(j)) + \ln(1 - N_t(j))] - \right. \\ & - \beta^t \lambda_t \left( C_t(j) + \frac{F_{t,t+1} B_{t+1}(j)}{P_t} + \int_0^1 \frac{\Xi_t^i}{P_t} F_{t,t+1} B_{t+1}^i(j) di + \int_0^1 \frac{Q_t(k) Z_{t+1}(k, j)}{P_t} dk - \right. \\ & \left. \left. - \frac{W_t}{P_t} N_t(j) + T_t(j) - \frac{\Omega_t(j)}{P_t} \right) \right\} + E_t \left\{ \beta^{t+1} (1 - \gamma)^{t+1} [\ln(C_{t+1}(j)) + \log(1 - N_{t+1}(j))] - \right. \\ & - \beta^{t+1} \lambda_{t+1} \left( C_{t+1}(j) + \frac{F_{t+1,t+2} B_{t+2}(j)}{P_{t+1}} + \int_0^1 \frac{\Xi_{t+1}^i}{P_{t+1}} F_{t+1,t+2} B_{t+2}^i(j) di + \right. \\ & \left. \left. + \int_0^1 \frac{Q_{t+1}(k) Z_{t+2}(k, j)}{P_{t+1}} dk - \frac{W_{t+1}}{P_{t+1}} N_{t+1}(j) + T_{t+1}(j) - \frac{\Omega_{t+1}(j)}{P_{t+1}} \right) \right\}, \end{aligned}$$

kde

$$E_t \left\{ \Omega_{t+1}(j) \right\} \equiv \frac{1}{1 - \gamma} E_t \left\{ B_{t+1}(j) + \int_0^1 \Xi_{t+1}^i B_{t+1}^i(j) di + \int_0^1 (Q_{t+1}(k) + D_{t+1}(k)) Z_{t+1}(k, j) dk \right\}.$$

Odvodíme podmienky prvého stupňa (prvé parciálne derivácie rovné 0):

- podľa spotreby  $C_t(j)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\delta L}{\delta C_t(j)} &= \frac{\beta^t(1-\gamma)^t}{C_t(j)} - \beta^t \lambda_t = 0 \\ \lambda_t &= \frac{(1-\gamma)^t}{C_t(j)}\end{aligned}\tag{A.1}$$

- podľa množstva práce  $N_t(j)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\delta L}{\delta N_t(j)} &= -\frac{\beta^t(1-\gamma)^t}{1-N_t(j)} + \beta^t \lambda_t \frac{W_t}{P_t} = 0 \\ \lambda_t &= \frac{P_t(1-\gamma)^t}{W_t(1-N_t(j))}\end{aligned}\tag{A.2}$$

- podľa množstva  $B_{t+1}(j)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\delta L}{\delta B_{t+1}(j)} &= E_t \left\{ -\beta^t \lambda_t \left( \frac{F_{t,t+1}}{P_t} \right) + \frac{\beta^{t+1} \lambda_{t+1}}{(1-\gamma)P_{t+1}} \right\} = 0 \\ \text{resp.} \\ \frac{\delta L}{\delta B_{t+1}^i(j)} &= E_t \left\{ -\beta^t \lambda_t \left( \frac{F_{t,t+1}}{P_t} \right) + \frac{\beta^{t+1} \lambda_{t+1}}{(1-\gamma)P_{t+1}} \right\} = 0 \\ \lambda_t &= \frac{\beta P_t E_t \{ \lambda_{t+1} \}}{(1-\gamma) E_t \{ F_{t,t+1} P_{t+1} \}}\end{aligned}\tag{A.3}$$

- podľa množstva držaných akcií  $Z_{t+1}(k, j)$ ;  $\forall k$ :

$$\begin{aligned}\frac{\delta L}{\delta Z_{t+1}(k, j)} &= E_t \left\{ -\beta^t \lambda_t \left( \frac{Q_t(k)}{P_t} \right) + \frac{\beta^{t+1} \lambda_{t+1} (Q_{t+1}(k) + D_{t+1}(k))}{(1-\gamma)P_{t+1}} \right\} = 0 \\ \lambda_t &= E_t \left\{ \frac{Q_{t+1}(k) + D_{t+1}(k)}{P_{t+1}} \right\} \frac{\beta P_t E_t \{ \lambda_{t+1} \}}{(1-\gamma) Q_t(k)}\end{aligned}\tag{A.4}$$

Kombinovaním [A.1](#) a [A.2](#) dostávame:

$$\begin{aligned}\frac{(1-\gamma)^t}{C_t(j)} &= \frac{P_t(1-\gamma)^t}{W_t(1-N_t(j))} \\ \frac{C_t(j)}{1-N_t(j)} &= \frac{W_t}{P_t}.\end{aligned}\tag{A.5}$$

Kombinovaním [A.1](#) a [A.3](#) dostávame:

$$\begin{aligned}\frac{(1-\gamma)^t}{C_t(j)} &= \frac{\beta P_t E_t \left\{ \frac{(1-\gamma)^{t+1}}{C_{t+1}(j)} \right\}}{(1-\gamma) E_t \{ F_{t,t+1} P_{t+1} \}} \\ E_t \{ F_{t,t+1} \} &= \beta E_t \left\{ \frac{P_t C_t(j)}{P_{t+1} C_{t+1}(j)} \right\}.\end{aligned}\tag{A.6}$$

Kombinovaním A.3 a A.4 dostávame:

$$\frac{\beta P_t E_t \{\lambda_{t+1}\}}{(1-\gamma) E_t \{F_{t,t+1} P_{t+1}\}} = E_t \left\{ \frac{Q_{t+1}(k) + D_{t+1}(k)}{P_{t+1}} \right\} \frac{\beta P_t E_t \{\lambda_{t+1}\}}{(1-\gamma) Q_t(k)} \quad (\text{A.7})$$

$$Q_t(k) = E_t \{F_{t,t+1} (Q_{t+1}(k) + D_{t+1}(k))\}.$$

### A.1.2 Log-linearizácie rovníc

V tejto časti odvodíme všetky log-linearizované rovnice, ktoré sa nachádzajú a týkajú domácností. Techniku prevezmeme z práce Urban (2013) [27], ktorý v práci odvodil netriviálnymi matematickými metódami platnosť nasledujúcich dvoch implikácií:

$$\begin{aligned} F(X_1(t), \dots, X_n(t)) &= G(Y_1(t), \dots, Y_k(t)) \\ \Rightarrow F(X_1, \dots, X_n) &= G(Y_1, \dots, Y_k) \\ \Rightarrow F_{X_1(t)}(X_1, \dots, X_n) \cdot X_1 \cdot x_1(t) + \dots + F_{X_n(t)}(X_1, \dots, X_n) \cdot X_n \cdot x_n(t) \\ &\cong G_{Y_1(t)}(Y_1, \dots, Y_k) \cdot Y_1 \cdot y_1(t) + \dots + G_{Y_k(t)}(Y_1, \dots, Y_k) \cdot Y_k \cdot y_k(t), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

kde malé písmeno  $x_i(t)$  značí logaritmicкую odchýlku premennej  $X_i(t)$  od svojho ustáleného stavu  $X_i$ . Teda  $\forall i$  píšeme:  $x_i(t) \equiv \ln[X_i(t)] - \ln(X_i)$ . Analogicky definujeme  $y_i(t)$ . Ďalej predpokladáme, že  $F(\cdot)$  a  $G(\cdot)$  sú  $n$ , resp.  $k$  dimenzionálne hladké funkcie<sup>1</sup>. V rovnici sa vyskytujú výrazy  $F_{X_i(t)}(X_1, \dots, X_n)$ , pričom ide o prvú parciálnu deriváciu podľa premennej  $X_i(t)$  v bode  $[X_1, \dots, X_n]$ , čiže v ustálenom stave. To isté platí pre funkciu  $G_{Y_i(t)}(Y_1, \dots, Y_k)$ . V našom prípade budú funkcie  $F(\cdot)$  a  $G(\cdot)$  konkrétne modelové rovnice – väčšinou nelineárne v parametroch, ktoré sa budeme snažiť linearizovať.

#### Rovnica 1.22

$$S_t \equiv \frac{P_{F,t}}{P_{H,t}} = \left( \int_0^1 S_{i,t}^{1-\zeta} di \right)^{\frac{1}{1-\zeta}}$$

Najprv jednoducho dokážeme  $S_t \equiv \frac{P_{F,t}}{P_{H,t}} \Rightarrow s_t = p_{F,t} - p_{H,t}$ . Zo vzťahu A.8 zrejme platí:

$$F(S_t) := S_t \Rightarrow F_{S_t}(S) \cdot S \cdot s_t = S \cdot s_t$$

$$\begin{aligned} G(P_{F,t}, P_{H,t}) := \frac{P_{F,t}}{P_{H,t}} &\Rightarrow G_{P_{F,t}}(P_F, P_H) \cdot P_F \cdot p_{F,t} + G_{P_{H,t}}(P_F, P_H) \cdot P_H \cdot p_{H,t} = \\ &= \frac{1}{P_H} \cdot P_F \cdot p_{F,t} + \frac{-P_F}{P_H^2} \cdot P_H \cdot p_{H,t} = \frac{P_F}{P_H} (p_{F,t} - p_{H,t}) \end{aligned}$$

$$F(S) = G(P_F, P_H) \Rightarrow S = \frac{P_F}{P_H} \Rightarrow s_t = p_{F,t} - p_{H,t},$$

kde ustálený stav je  $P_F = P_H = P$  čiže  $S = 1$ . O niečo náročnejšie je bude zlog-linearizovať integrál pod odmocninou. Znovu aplikujeme A.8:

$$G(S_{i,t}) := \left( \int_0^1 S_{i,t}^{1-\zeta} di \right)^{\frac{1}{1-\zeta}},$$

no je nutné si uvedomiť, že premenných  $S_{i,t}$  je „nespočetne mnoho“ a taktiež dostaneme „nespočetne mnoho“ parciálnych derivácií. Jedna konkrétna parciálna derivácia podľa pevne zvoleného  $S_{i,t}$

<sup>1</sup>existujú pre nich všetky parciálne derivácie aspoň prvého stupňa

(pevné  $\bar{i} \in [0, 1]$ ) vyzerať nasledovne:

$$\begin{aligned} G_{S_{i,t}}(S_i) \cdot S_i \cdot s_{i,t} &= \frac{1}{1-\zeta} \left( \int_0^1 S_i^{1-\zeta} di \right)^{\frac{1}{1-\zeta}-1} (1-\zeta) S_i^{-\zeta} \cdot S_i \cdot s_{i,t} = \\ &= \left( \int_0^1 S_i^{1-\zeta} di \right)^{\frac{\zeta}{1-\zeta}} S_i^{1-\zeta} s_{i,t}, \end{aligned}$$

odkiaľ dostaneme súčet „nespočetne mnoho“ parciálnych derivácií podľa  $S_{i,t}$  pre  $\forall i$  v podobe:

$$G_{S_{i,t}}(S_i) \cdot S_i \cdot s_{i,t} = \left( \int_0^1 S_i^{1-\zeta} di \right)^{\frac{\zeta}{1-\zeta}} \int_0^1 S_i^{1-\zeta} di \int_0^1 s_{i,t} di.$$

Vyhodnotením rovnice v ustálenom stave  $S_i = 1$  pre  $\forall i$  dostaneme:

$$\int_0^1 s_{i,t} di,$$

kde využijeme vzťah  $\int_0^1 di = 1$ . Celkovo platí:

$$s_t = p_{F,t} - p_{H,t} = \int_0^1 s_{i,t} di. \quad (\text{A.9})$$

### Rovnica 1.23

$$P_t \equiv \left[ (1-\alpha)P_{H,t}^{1-\omega} + \alpha P_{F,t}^{1-\omega} \right]^{\frac{1}{1-\omega}}$$

Označme:

$$\begin{aligned} F(P_t) &:= P_t^{1-\omega} \\ G(P_{F,t}, P_{H,t}) &:= (1-\alpha)P_{H,t}^{1-\omega} + \alpha P_{F,t}^{1-\omega}. \end{aligned}$$

Užitím vzťahov A.8 a ustáleného stavu v podobe  $P_H = P_F = P$  dostaneme:

$$F_{P_t}(P) \cdot P \cdot p_t = (1-\omega)P^{-\omega} \cdot P \cdot p_t = (1-\omega)P^{1-\omega} p_t$$

$$\begin{aligned} G_{P_{F,t}}(P_F, P_H) \cdot P_F \cdot p_{F,t} + G_{P_{H,t}}(P_F, P_H) \cdot P_H \cdot p_{H,t} &= \alpha(1-\omega)P^{-\omega} \cdot P \cdot p_{F,t} + \\ &+ (1-\alpha)(1-\omega)P^{-\omega} \cdot P \cdot p_{H,t} = \\ &= (1-\omega)P^{1-\omega} [(1-\alpha)p_{H,t} + \alpha p_{F,t}]. \end{aligned}$$

Odkiaľ bezprostredne dostávame:

$$p_t = (1-\alpha)p_{H,t} + \alpha p_{F,t}.$$

Použijeme vzťah  $s_t = p_{F,t} - p_{H,t}$  z rovnice 1.22 a upravíme:

$$p_t = (1-\alpha)p_{H,t} + \alpha p_{F,t} = p_{H,t} + \alpha s_t. \quad (\text{A.10})$$

### Rovnica 1.25

$$P_{F,t} = \left[ \int_0^1 (\Xi_t^i P_{i,t}^i)^{1-\zeta} di \right]^{\frac{1}{1-\zeta}}$$

Označme:

$$F(P_{F,t}) := P_{F,t}^{1-\zeta}$$

$$G(P_{i,t}^i, \Xi^i) := \int_0^1 \left( \Xi^i P_{i,t}^i \right)^{1-\zeta} di$$

a aplikujeme vzťah A.8 pri ustálenom stave  $P = P_i = P_F = P_H$  a  $\Xi \equiv \Xi^i = \frac{P_i}{P} = \frac{P}{P_i}$ :

$$F_{P_{F,t}}(P_F) \cdot (P_F) \cdot p_{F,t} = (1-\zeta)(P_F)^{-\zeta} \cdot (P_F) \cdot p_t = (1-\zeta)P^{1-\zeta} p_{F,t}$$

$$\begin{aligned} G_{P_{i,t}^i}(P_i^i, \Xi^i) \cdot P_i^i \cdot p_{i,t}^i + G_{\Xi^i}(P_i^i, \Xi^i) \cdot \Xi^i \cdot e_t^i &= \int_0^1 \left[ (1-\zeta)\Xi^{1-\zeta}(P_i^i)^{-\zeta} \cdot P_i^i \cdot p_{i,t}^i + \right. \\ &\quad \left. + (1-\zeta)\Xi^{-\zeta}(P_i^i)^{1-\zeta} \cdot \Xi \cdot e_t^i \right] di \\ &= (1-\zeta)(P_i^i \Xi)^{1-\zeta} \int_0^1 (p_{i,t}^i + e_t^i) di \\ &= (1-\zeta)P^{1-\zeta} \int_0^1 (p_{i,t}^i + e_t^i) di, \end{aligned}$$

kde  $e_t^i = \ln(\Xi^i) - \ln(\Xi^i)$ . Odtiaľ pomocou vzťahu A.8 bezprostredne dostávame:

$$p_{F,t} = \int_0^1 (p_{i,t}^i + e_t^i) di.$$

Ďalej upravíme do podoby:

$$p_{F,t} = \int_0^1 (p_{i,t}^i + e_t^i) di = \int_0^1 p_{i,t}^i di + \int_0^1 e_t^i di \equiv p_t^* + e_t. \quad (\text{A.11})$$

### Rovnica 1.28

$$C_t = \varkappa_i C_t^i \Upsilon_{i,t} \quad \forall t$$

Keďže  $\Upsilon_{i,t} \equiv \frac{\Xi^i P_i^i}{P}$  a  $\varkappa_i = 1$ , tak platí:

$$C_t P_t = C_t^i \Xi^i P_t^i.$$

Označme:

$$F(C_t, P_t) := C_t P_t$$

$$G(C_t^i, \Xi^i, P_t^i) := C_t^i \Xi^i P_t^i$$

a použime vzťah A.8 pri ustálenom stave  $\Xi = \Xi^i = \frac{P_i}{P} = \frac{P}{P_i}$ :

$$F_{C_t}(C, P) \cdot C \cdot c_t + F_{P_t}(C, P) \cdot P \cdot p_t = CP \cdot (c_t + p_t)$$

$$G_{C_t^i}(C^i, \Xi^i, P^i) \cdot C^i \cdot c_t^i + G_{\Xi^i}(C^i, \Xi^i, P^i) \cdot \Xi^i \cdot e_t^i + G_{P_t^i}(C^i, \Xi^i, P^i) \cdot P^i \cdot p_t^i = C^i \Xi^i P^i \cdot (c_t^i + e_t^i + p_t^i)$$

kde  $e_t^i = \ln(\Xi^i) - \ln(\Xi^i)$ . Odtiaľ pomocou vzťahu A.8 bezprostredne dostávame:

$$c_t = c_t^i + e_t^i + p_t^i - p_t.$$

Rovnicu zintegrujeme (pritom využijeme platnosť  $\int_0^1 di = 1$ ):

$$c_t = \int_0^1 c_t^i di + \int_0^1 e_t^i di + \int_0^1 p_t^i di - p_t = c_t^* + e_t + p_t^* - p_t \quad (\text{A.12})$$

**Rovnica 1.30**

$$E_t \left\{ F_{t,t+1} \left[ (1+r_t) - (1+r_t^*) \frac{\Xi_{t+1}}{\Xi_t} \right] \right\} = 0$$

Rovnicu prepíšeme do prehľadnejšej podoby:

$$(1+r_t)\Xi_t = (1+r_t^*)E_t\{\Xi_{t+1}\}.$$

Označme:

$$F((1+r_t), \Xi_{t+1}) := (1+r_t)\Xi_t$$

$$G((1+r_t^*), \Xi_t) := (1+r_t^*)E_t\{\Xi_{t+1}\}$$

a aplikujeme vzťah A.8 pri ustálenom stave  $r_t = r_t^* = r$  a označení  $\bar{\rho} \equiv \ln(1+r)$ :

$$\begin{aligned} F_{1+r_t}(1+r, \Xi) \cdot (1+r) \cdot [\ln(1+r_t) - \bar{\rho}] &+ F_{\Xi_t}(1+r, \Xi) \cdot \Xi \cdot e_t = \\ &= \Xi \cdot (1+r) \cdot (r_t - \bar{\rho}) + (1+r) \cdot \Xi \cdot e_t \\ &= \Xi(1+r) \cdot (r_t - \bar{\rho} + e_t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{1+r_t^*}(1+r, \Xi) \cdot (1+r) \cdot [\ln(1+r_t^*) - \bar{\rho}] &+ G_{\Xi_{t+1}}(1+r, \Xi) \cdot \Xi \cdot E_t\{e_{t+1}\} = \\ &= \Xi \cdot (1+r) \cdot (r_t^* - \bar{\rho}) + (1+r) \cdot \Xi \cdot E_t\{e_{t+1}\} \\ &= \Xi(1+r) \cdot (r_t^* - \bar{\rho} + E_t\{e_{t+1}\}), \end{aligned}$$

kde sme využili aproximáciu  $\ln(1+r_t) \approx r_t$ , resp.  $\ln(1+r_t^*) \approx r_t^*$ . Odtiaľ pomocou vzťahu A.8 bezprostredne dostávame:

$$\begin{aligned} r_t + e_t &= r_t^* + E_t\{e_{t+1}\} \\ r_t - r_t^* &= E_t\{e_{t+1}\} - e_t \equiv E_t\{\Delta e_{t+1}\}. \end{aligned} \tag{A.13}$$

**A.1.3 Inflácie**

Hrubá miera inflácia je definovaná:

$$\Pi_t \equiv \frac{P_t}{P_{t-1}}.$$

Po logaritmovaní a zohľadnení ustáleného stavu  $P = P_t = P_{t-1} \Rightarrow \Pi = 1$  pre  $\forall t$ :

$$\begin{aligned} \ln(\Pi_t) &\equiv \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) \\ \ln(\Pi_t) - \ln(\Pi) &= \ln(P_t) - \ln(P) - [\ln(P_{t-1}) - \ln(P)] \\ \pi_t &= p_t - p_{t-1}. \end{aligned}$$

Úplne analogicky sa odvodí vzťah:  $\pi_{H,t} = p_{H,t} - p_{H,t-1}$ . Použijeme rovnicu 1.23 v období  $t$  a  $t-1$  a odčítame ich:

$$\begin{aligned} p_t - p_{t-1} &= p_{H,t} - p_{H,t-1} + \alpha s_t - \alpha s_{t-1} \\ \pi_t &= \pi_{H,t} + \alpha \Delta s_t, \end{aligned} \tag{A.14}$$

kde  $\Delta s_t = s_t - s_{t-1}$ .

### A.1.4 Rozpočtové obmedzenie do tvaru SDR

Rovnicu 1.7:

$$Q_t(k) = E_t \{F_{t,t+1}(Q_{t+1}(k) + D_{t+1}(k))\}$$

dosadíme do rozpočtového obmedzenia 1.3 a vynásobíme premennou  $P_t$ :

$$\begin{aligned} P_t C_t(j) + E_t \{F_{t,t+1} B_{t+1}(j)\} + \int_0^1 \Xi_t^i E_t \{F_{t,t+1} B_{t+1}^i(j)\} di + \\ + \int_0^1 E_t \{F_{t,t+1}(Q_{t+1}(k) + D_{t+1}(k))\} Z_{t+1}(k, j) dk = W_t N_t(j) - P_t T_t(j) + \Omega_t(j). \end{aligned}$$

Ďalej použijeme rovnicu 1.1 v čase  $t + 1$  vynásobenú výrazom  $E_t \{F_{t,t+1}\} (1 - \gamma)$ :

$$\begin{aligned} E_t \{F_{t,t+1} (1 - \gamma) \Omega_{t+1}(j)\} = \\ = E_t \left\{ F_{t,t+1} \left[ B_{t+1}(j) + \int_0^1 \Xi_{t+1}^i B_{t+1}^i(j) di + \int_0^1 (Q_{t+1}(k) + D_{t+1}(k)) Z_{t+1}(k, j) dk \right] \right\}. \end{aligned}$$

Môžeme si všimnúť, že výraz za členom  $P_t C_t(j)$  na ľavej strane rovnice upraveného rozpočtového obmedzenia je rovnaký ako pravá strana predchádzajúcej rovnice. Ich kombinovaním teda získame SDR rovnicu vzhľadom ku  $\Omega_t$ :

$$P_t C_t(j) + E_t \{F_{t,t+1} (1 - \gamma) \Omega_{t+1}(j)\} = W_t N_t(j) - P_t T_t(j) + \Omega_t(j). \quad (\text{A.15})$$

### A.1.5 Odvodenie rovnice 1.38

Toto odvodenie patrí medzi jedno z najnáročnejších. Prvým krokom bude iterácia SDR rovnice 1.36 v tvare:

$$\Omega_t(j) = K_t + E_t \{F_{t,t+1} (1 - \gamma) \Omega_{t+1}(j)\}$$

vpred vzhľadom ku členu  $\Omega_t(j)$  (len prvé dva členy):

$$\Omega_t(j) = K_t + E_t \{F_{t,t+1} (1 - \gamma) [K_{t+1} + F_{t+1,t+2} (1 - \gamma) [K_{t+2} + F_{t+2,t+3} (1 - \gamma) \Omega_{t+3}(j)]]\},$$

kde sme použili substitúciu:

$$K_t \equiv P_t C_t(j) - [W_t N_t(j) - P_t T_t(j)].$$

Ďalej roznásobíme členy rovnice do tvaru:

$$\begin{aligned} \Omega_t(j) = K_t + (1 - \gamma) E_t \{F_{t,t+1} K_{t+1}\} + (1 - \gamma)^2 E_t \{F_{t,t+1} F_{t+1,t+2} K_{t+2}\} + \\ + (1 - \gamma)^3 E_t \{F_{t,t+1} F_{t+1,t+2} F_{t+2,t+3} \Omega_{t+3}(j)\} \end{aligned}$$

a indukciou rozšírime pre prvých  $k$  členov, pričom použijeme operátor súčiny  $\Pi$ :

$$\begin{aligned} \Omega_t(j) = K_t + (1 - \gamma) E_t \{F_{t,t+1} K_{t+1}\} + \dots \\ \dots + (1 - \gamma)^k E_t \left\{ \prod_{s=0}^{k-1} F_{t+s,t+s+1} K_{t+k} \right\} + \\ + (1 - \gamma)^{k+1} E_t \left\{ \prod_{s=0}^k F_{t+s,t+s+1} \Omega_{t+k+1}(j) \right\}. \end{aligned}$$

Využijeme prvú rovnosť zo vzťahu 1.37 a prepíšeme rovnicu v notácii súm:

$$\begin{aligned}\Omega_t(j) &= \sum_{i=0}^k E_t \left\{ (1-\gamma)^i F_{t,t+i} K_{t+i} \right\} + \\ &+ (1-\gamma)^{k+1} E_t \left\{ F_{t,t+k+1} \Omega_{t+k+1}(j) \right\}\end{aligned}$$

za predpokladu  $E_t \{F_{t,t}\} = 1$ . Aplikujeme limitu pre  $k \rightarrow \infty$  a na základe „noPonzi“ podmienky 1.35 sa zbavíme výrazu  $(1-\gamma)^{k+1} E_t \{F_{t,t+k+1} \Omega_{t+k+1}(j)\}$ , t.j.:

$$\Omega_t(j) = \sum_{i=0}^{\infty} E_t \left\{ (1-\gamma)^i F_{t,t+i} K_{t+i} \right\}$$

Použijeme spätnú substitúciu, teda dosadíme za  $K_{t+i}$  a rozdelíme sumu na dve, pričom použijeme aj definíciu ľudského bohatstva 1.4 v tvare:

$$H_t(j) \equiv E_t \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} F_{t,t+i} (1-\gamma)^i (W_{t+i} N_{t+i}(j) - P_{t+i} T_{t+i}(j)) \right\}$$

Dostaneme:

$$\Omega_t(j) = \sum_{i=0}^{\infty} E_t \left\{ (1-\gamma)^i F_{t,t+i} P_{t+i} C_{t+i}(j) \right\} - H_t(j)$$

Za výraz  $E_t \{F_{t,t+i} P_{t+i} C_{t+i}(j)\}$  dosadíme z rovnice 1.37 a získame nový tvar:

$$\Omega_t(j) + H_t(j) = \sum_{i=0}^{\infty} (1-\gamma)^i \beta^i P_t C_t(j).$$

Všimnime si, že koeficient  $[(1-\gamma)\beta]^i$  je vždy menší od jednej, z čoho vyplýva, že túto sumu môžeme vypočítať. Platí:  $\sum_{i=0}^{\infty} ((1-\gamma)\beta)^i = \frac{1}{1-(1-\gamma)\beta}$ <sup>2</sup>. Vďaka tomu prepíšeme predošlú rovnicu do jej finálnej podoby:

$$[1 - \beta(1-\gamma)](\Omega_t(j) + H_t(j)) = P_t C_t(j) \quad (\text{A.16})$$

### A.1.6 Odvodenie rovnice 1.47

Najprv sa zameriame na úpravu definície 1.44:

$$H_t = E_t \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} F_{t,t+k} (1-\gamma)^k (W_{t+k} N_{t+k} - P_{t+k} T_{t+k}) \right\}.$$

Od sumy oddelíme prvý člen:

$$H_t = (W_t N_t - P_t T_t) + E_t \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} F_{t,t+k+1} (1-\gamma)^{k+1} (W_{t+k+1} N_{t+k+1} - P_{t+k+1} T_{t+k+1}) \right\}.$$

Potom využijeme vzťah  $E_t \{F_{t,t+k+1}\} = E_t \{F_{t,t+1}\} E_t \{F_{t+1,t+k+1}\}$  a definíciu ľudského bohatstva 1.4, posunutú o obdobie dopredu. Obdržíme:

$$H_t = (W_t N_t - P_t T_t) + E_t \{F_{t,t+1} (1-\gamma) H_{t+1}\}.$$

<sup>2</sup> $P_t C_t(j)$  nezávisí na indexe sumy  $i$

Teraz upravíme rovnicu 1.46 tak, že ju posunieme do času  $t + 1$  a vynásobíme výrazom  $\frac{F_{t,t+1}(1-\gamma)}{[1-\beta(1-\gamma)]}$ :

$$\begin{aligned} E_t \left\{ \frac{F_{t,t+1}(1-\gamma)}{[1-\beta(1-\gamma)]} P_{t+1} C_{t+1} \right\} &= E_t \{ F_{t,t+1}(1-\gamma) (\Omega_{t+1} + H_{t+1}) \} = \\ &= E_t \{ F_{t,t+1}(1-\gamma) (\Omega_{t+1}) \} + E_t \{ F_{t,t+1}(1-\gamma) (H_{t+1}) \}. \end{aligned}$$

Túto rovnicu skombinujeme s predošlou rovnicou a dostaneme:

$$H_t - (W_t N_t - P_t T_t) = E_t \left\{ \frac{F_{t,t+1}(1-\gamma)}{[1-\beta(1-\gamma)]} P_{t+1} C_{t+1} \right\} - E_t \{ F_{t,t+1}(1-\gamma) (\Omega_{t+1}) \}.$$

Dosadením za  $\Omega_t$  z rovnice 1.45 do rovnice 1.46 získame:

$$P_t C_t = [1 - \beta(1 - \gamma)] (P_t C_t + E_t \{ F_{t,t+1} \Omega_{t+1} \}) - (W_t N_t - P_t T_t) + H_t,$$

potom kombinujeme dve predchádzajúce rovnice a upravujeme:

$$\begin{aligned} P_t C_t &= [1 - \beta(1 - \gamma)] \left( P_t C_t + \gamma E_t \{ F_{t,t+1} \Omega_{t+1} \} + E_t \left\{ \frac{F_{t,t+1}(1-\gamma)}{[1-\beta(1-\gamma)]} P_{t+1} C_{t+1} \right\} \right) \\ \beta P_t C_t &= [1 - \beta(1 - \gamma)] \frac{\gamma}{1-\gamma} E_t \{ F_{t,t+1} \Omega_{t+1} \} + E_t \{ F_{t,t+1} P_{t+1} C_{t+1} \} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

## A.2 Apendix: Firmy

### A.2.1 Priemerná dĺžka platnosti ceny

Interpretácia Calvo parametra môže byť nasledovná: „S pravdepodobnosťou  $\theta$  firma v danom období cenu nezmení a s pravdepodobnosťou  $1 - \theta$  ju zmení.“ Zavedieme ešte jeden celkom rozumný predpoklad: pravdepodobnosť úpravy ceny je nezávislá na dobe, ktorá uplynula od poslednej úpravy. Nech  $Y$  je diskretná náhodná veličina určujúca dĺžku intervalu medzi zmenami, resp. počet období trvania kontraktu (ceny). Pravdepodobnostná funkcia je v tvare<sup>3</sup>:

$$p(y) = \begin{cases} (1 - \theta)\theta^{y-1} & y = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Z definície strednej hodnoty diskretnej n.v. a na základe možnosti zámény derivácie a sumy plynie:

$$E(Y) = \sum_{y=1}^{\infty} y p(y) = \sum_{y=1}^{\infty} y (1 - \theta)\theta^{y-1} = (1 - \theta) \frac{\delta (\sum_{y=1}^{\infty} \theta^y)}{\delta \theta} = (1 - \theta) \frac{\delta (\frac{\theta}{1-\theta})}{\delta \theta} = \frac{1}{1 - \theta}$$

To znamená, že ak je napr.  $\theta = 0.625$ , tak je priemerná dĺžka kontraktu pri štvrtročných údajoch rovná osem mesiacov.

<sup>3</sup>ak sa cena zmení až v období  $y$  znamená, že cena ostáva prvých  $y - 1$  období nezmenená –to za spomínaného predpokladu nezávislosti dáva pravdepodobnosť  $\theta^{y-1}$

## A.3 Apendix: Rovnováha

### A.3.1 Ustálené stavy a iné vzťahy

Pred log-linearizovaním ešte zhrnieme pár faktov:

- z 1.33 plynie:

$$E_t \{f_{t,t+1}\} = \ln(E_t \{F_{t,t+1}\}) - \ln(F) = -\ln(1+r_t) + \ln(1+r) = -r_t + \bar{\rho}, \quad (\text{A.18})$$

lebo  $\ln(1+r_t) \approx r_t$  a  $\bar{\rho} \equiv \ln(1+r)$

a vypočítame ustálené stavy niektorých rovníc:

- rovnica 1.33 a 1.34

$$F = \frac{1}{1+r} \quad \text{a} \quad \frac{1}{1+r} = \beta \quad \text{teda} \quad \beta = F \quad (\text{A.19})$$

- rovnica 1.67

$$F\Omega = PQ \quad (\text{A.20})$$

- rovnica 1.72

$$\beta^{-1}(1+\Lambda)Q = Q + D \quad (\text{A.21})$$

- rovnica 1.52

$$Y = AN \quad (\text{A.22})$$

- rovnica 1.54

$$MC = (1-\vartheta) \frac{W}{PA} \quad (\text{A.23})$$

- rovnica 1.68

$$D = Y(1-MC) = Y - (1-\vartheta) \frac{W}{P} N \quad (\text{A.24})$$

### A.3.2 Log-linearizácie rovníc strany dopytu

V tejto časti odvodíme všetky log-linearizované rovnice, ktoré sa týkajú kapitoly Rovnováha, konkrétne dopytovej strany. Technika je rovnaká ako bola použitá v časti domácnosti.

**Rovnica 1.69**

$$\beta C_t = [1 - \beta(1-\gamma)] \frac{\gamma}{1-\gamma} Q_t + E_t \{F_{t,t+1} \Pi_{t+1} C_{t+1}\}$$

Označme:

$$F(C_t) := \beta C_t$$

$$G(Q_t, F_{t,t+1}, \Pi_{t+1}, C_{t+1}) := [1 - \beta(1-\gamma)] \frac{\gamma}{1-\gamma} Q_t + E_t \{F_{t,t+1} \Pi_{t+1} C_{t+1}\}$$

a aplikujeme vzťah A.8 pri ustálenom stave  $\Pi = 1$ :

$$F_{C_t}(C) \cdot C \cdot c_t = \beta \cdot C \cdot c_t = F \cdot C \cdot c_t$$

$$\begin{aligned} & G_{Q_t}(Q, F, \Pi, C) \cdot Q \cdot q_t + G_{F_{t,t+1}}(Q, F, \Pi, C) \cdot F \cdot E_t \{f_{t,t+1}\} + \\ & + G_{\Pi_{t+1}}(Q, F, \Pi, C) \cdot \Pi \cdot E_t \{\pi_{t+1}\} + G_{C_{t+1}}(Q, F, \Pi, C) \cdot C \cdot E_t \{c_{t+1}\} = \\ & = [1 - \beta(1 - \gamma)] \frac{\gamma}{1 - \gamma} \cdot Q \cdot q_t + FC \cdot E_t \{f_{t,t+1} + \pi_{t+1} + c_{t+1}\} = \\ & = [1 - \beta(1 - \gamma)] \frac{\gamma}{1 - \gamma} \cdot \frac{F\Omega}{P} \cdot q_t + FC \cdot E_t \{-r_t + \bar{\rho} + \pi_{t+1} + c_{t+1}\}, \end{aligned}$$

kde sme využívali ustálený stav A.20 a vzťah A.18. Odtiaľ pomocou vzťahu A.8 dostávame:

$$FCc_t = [1 - \beta(1 - \gamma)] \frac{\gamma}{1 - \gamma} \frac{F\Omega}{P} q_t + FC[-r_t + \bar{\rho} + E_t \{\pi_{t+1}\} + E_t \{c_{t+1}\}].$$

Ďalej podelením  $FC$  a za použitia rovnice 1.63 upravíme na:

$$y_t - \alpha \eta s_t = [1 - \beta(1 - \gamma)] \frac{\gamma}{1 - \gamma} \frac{\Omega}{PC} q_t - r_t + \bar{\rho} + E_t \{\pi_{t+1}\} + E_t \{y_{t+1}\} - \alpha \eta E_t \{s_{t+1}\},$$

resp. pomocou substitúcie  $\Psi \equiv [1 - \beta(1 - \gamma)] \frac{\gamma}{1 - \gamma} \frac{\Omega}{PC}$ , dostaneme:

$$y_t = \Psi q_t - r_t + \bar{\rho} + E_t \{\pi_{t+1}\} + E_t \{y_{t+1}\} - \alpha \eta E_t \{\Delta s_{t+1}\}.$$

Táto rovnica sa po dosadení za  $\pi_{t+1}$  z rovnice 1.24 dá prepísať do tvaru:

$$y_t = \Psi q_t - r_t + \bar{\rho} + E_t \{\pi_{H,t+1}\} + E_t \{y_{t+1}\} - \alpha \Theta E_t \{\Delta s_{t+1}\},$$

kde  $\Theta \equiv \eta - 1$  a následne po dosadení za  $\Delta s_{t+1}$  z rovnice 1.66 a drobnými algebraickými úpravami dostaneme tvar:

$$y_t = \frac{\Psi q_t - r_t + \bar{\rho} + E_t \{\pi_{H,t+1}\}}{\nu_\alpha} + E_t \{y_{t+1}\} + \alpha \Theta E_t \{\Delta y_{t+1}^*\}. \quad (\text{A.25})$$

Aby sme vedeli odhadnúť parameter  $\Psi$ , potrebujeme vyjadriť člen  $\frac{\Omega}{PC}$  ako funkciu parametrov. Postupne dosadzujeme do rovnice A.20:

$$\frac{\Omega}{PC} \stackrel{\text{A.19}}{=} \frac{Q}{\beta C} \stackrel{\text{A.21}}{=} \frac{D}{[1 + \Lambda - \beta] C} \stackrel{\text{A.24}}{=} \frac{(1 - MC)}{[1 + \Lambda - \beta] \frac{C}{Y}} = \frac{\mu}{[1 + \Lambda - \beta] (1 + \mu) \frac{C}{Y}},$$

kde sme v poslednom kroku využili vzťah medzi medznými nákladmi a prírážkou.

### Rovnica 1.72

$$(1 + r_t)(1 + \Lambda)Q_t = E_t \{\Pi_{t+1} [Q_{t+1} + D_{t+1}]\}$$

Označme:

$$F(1 + r_t, Q_t) := (1 + r_t)(1 + \Lambda)Q_t$$

$$G(\Pi_{t+1}, Q_{t+1}, D_{t+1}) := E_t \{\Pi_{t+1} [Q_{t+1} + D_{t+1}]\}$$

a aplikujeme vzťah A.8 s rovnovážnym stavom  $\Pi = 1, \beta = \frac{1}{1+r}$  a pri približnej platnosti  $\ln(1 + r) - \ln(1 + r) = r_t - \bar{\rho}$ :

$$F_{(1+r_t)}(\beta^{-1}, Q) \cdot \beta^{-1} \cdot (r_t - \bar{\rho}) + F_{Q_t}(\beta^{-1}, Q) \cdot Q \cdot q_t = \beta^{-1}(1 + \Lambda)Q \cdot (r_t - \bar{\rho} + q_t)$$

$$\begin{aligned} & G_{\Pi_{t+1}}(\Pi, Q, D) \cdot \Pi \cdot E_t \{\pi_{t+1}\} + G_{Q_{t+1}}(\Pi, Q, D) \cdot Q \cdot E_t \{q_{t+1}\} + \\ & + G_{D_{t+1}}(\Pi, Q, D) \cdot D \cdot E_t \{d_{t+1}\} = (Q + D) \cdot E_t \{\pi_{t+1}\} + Q \cdot E_t \{q_{t+1}\} + D \cdot E_t \{d_{t+1}\}. \end{aligned}$$

Odtiaľ pomocou vzťahu A.8 platí:

$$\beta^{-1}(1+\Lambda)Q(r_t - \bar{p} + q_t) = (Q+D)E_t\{\pi_{t+1}\} + QE_t\{q_{t+1}\} + DE_t\{d_{t+1}\}.$$

Vydělíme rovnicu jej rovnovážnym stavom A.21 a získame:

$$(r_t - \bar{p} + q_t) = E_t\{\pi_{t+1}\} + \frac{\beta}{1+\Lambda}E_t\{q_{t+1}\} + \frac{\beta}{1+\Lambda}\frac{D}{Q}E_t\{d_{t+1}\}.$$

Z rovnovážneho stavu dosadíme aj za  $D$  a upravujeme:

$$\begin{aligned} q_t &= E_t\{\pi_{t+1}\} - r_t + \bar{p} + \frac{\beta}{1+\Lambda}E_t\{q_{t+1}\} + \frac{\beta}{1+\Lambda}\frac{\beta^{-1}(1+\Lambda)Q-Q}{Q}E_t\{d_{t+1}\} \\ q_t &= E_t\{\pi_{H,t+1} + \alpha\Delta s_{t+1}\} - r_t + \bar{p} + \frac{\beta}{1+\Lambda}E_t\{q_{t+1}\} + \frac{1+\Lambda-\beta}{1+\Lambda}E_t\{d_{t+1}\}, \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

kde sme v poslednom kroku využili vzťah  $\pi_t = \pi_{H,t} + \alpha\Delta s_t$ .

### Rovnica 1.68

$$D_t = \frac{P_{H,t}}{P_t}Y_t - (1-\vartheta)\frac{W_t}{P_t}N_t \exp(\mu_t^p)$$

Označme:

$$F(D_t, P_t) := D_t P_t$$

$$G(P_{H,t}, Y_t, W_t, N_t, \exp(\mu_t^p)) := P_{H,t}Y_t - (1-\vartheta)W_tN_t \exp(\mu_t^p)$$

a aplikujeme vzťah A.8 pri ustálenom stave  $P = P_H$  a  $\mu^p = 0$ :

$$F_{D_t}(D, P) \cdot D \cdot d_t + F_{P_t}(D, P) \cdot P \cdot p_t = PD \cdot (d_t + p_t)$$

$$\begin{aligned} &G_{P_t}(P, Y, W, N, \exp(\mu^p)) \cdot P \cdot p_t + G_{Y_t}(P, Y, W, N, \exp(\mu^p)) \cdot Y \cdot y_t + \\ &+ G_{W_t}(P, Y, W, N, \exp(\mu^p)) \cdot W \cdot w_t + G_{N_t}(P, Y, W, N, \exp(\mu^p)) \cdot N \cdot n_t + \\ &+ G_{\exp(\mu_t^p)}(P, Y, W, N, \exp(\mu^p)) \cdot \exp(\mu^p) \cdot (\mu_t^p - \mu^p) = \\ &= YP \cdot (p_{H,t} + y_t) - (1-\vartheta)WN \cdot (w_t + n_t + \mu_t^p), \end{aligned}$$

pretože  $\exp(0) = 1$ . Odtiaľ pomocou vzťahu A.8 platí:

$$PD(d_t + p_t) = YP(p_{H,t} + y_t) - (1-\vartheta)WN(w_t + n_t + \mu_t^p).$$

Vydělíme rovnicu členom  $PD$  a použijeme ustálený stav A.24. Dostaneme:

$$d_t = \frac{Y}{D}(p_{H,t} + y_t - p_t) + \left(1 - \frac{Y}{D}\right)(w_t + n_t + \mu_t^p - p_t).$$

Pomocou 1.53, 1.55 a 1.23 sa dá veľmi ľahko ukázať, že platí:

$$d_t = \frac{Y}{D}(y_t - \alpha s_t) + \left(1 - \frac{Y}{D}\right)(y_t - \alpha s_t + mc_t)$$

a tým pádom aj

$$d_t = y_t - \alpha s_t + \left(1 - \frac{Y}{D}\right)mc_t.$$

Upravujeme teraz člen  $\left(1 - \frac{Y}{D}\right)$  pomocou ustálených stavov:

$$\left(1 - \frac{Y}{D}\right) \stackrel{\text{A.24}}{=} -(1-\vartheta)\frac{WN}{PD} \stackrel{\text{A.22}}{=} -(1-\vartheta)\frac{WY}{PDA} \stackrel{\text{A.23}}{=} -MC\frac{Y}{D} \stackrel{\text{A.24}}{=} -\frac{MC}{1-MC}$$

a dosadíme do predošlej rovnice:

$$d_t = y_t - \alpha s_t - \frac{MC}{1-MC}mc_t. \quad (\text{A.27})$$

### A.3.3 Log-linearizácie rovníc strany ponuky

Rovnica 1.43

$$\frac{C_t}{1 - N_t} = \frac{W_t}{P_t}$$

Označme:

$$F(C_t, P_t) := C_t P_t$$

$$G(W_t, N_t) := W_t(1 - N_t)$$

a aplikujeme vzťah A.8 s rovnovážnym stavom  $CP = W(1 - N)$ :

$$F_{C_t}(C, P) \cdot C \cdot c_t + F_{P_t}(C, P) \cdot P \cdot p_t = CP \cdot (c_t + p_t) = W(1 - N) \cdot (c_t + p_t)$$

$$G_{W_t}(W, N) \cdot W \cdot w_t + G_{N_t}(W, N) \cdot N \cdot n_t = (1 - N) \cdot W \cdot w_t - W \cdot N n_t.$$

Odtiaľ pomocou vzťahu A.8 po vydelení členom  $W(1 - N)$  dostávame:

$$c_t + p_t = w_t - \varphi n_t, \quad (\text{A.28})$$

kde  $\varphi \equiv \frac{N}{1 - N}$ .

### A.3.4 Odvodenie hybridnej Phillipsovej krivky 1.81

Odvodenie je zdĺhavé, takže preto ho rozdelíme do niekoľkých častí a niektoré jednoduchšie kroky necháme na čitateľa.

#### a) Úprava rovnice 1.58

Vypíšeme prvých pár členov sumy pre  $t$  aj pre  $t + 1$ :

$$p_{H,t}^{FL} = (1 - \beta\theta) \left[ mc_t^n + \beta\theta E_t \{ mc_{t+1}^n \} + (\beta\theta)^2 E_t \{ mc_{t+2}^n \} + \dots \right]$$

$$E_t \{ p_{H,t+1}^{FL} \} = (1 - \beta\theta) \left[ E_t \{ mc_{t+1}^n \} + \beta\theta E_t \{ mc_{t+2}^n \} + \dots \right].$$

Upravíme 2. rovnicu jednoduchými úpravami do tvaru:

$$\beta\theta \frac{E_t \{ p_{H,t+1}^{FL} \}}{(1 - \beta\theta)} = \left[ \beta\theta E_t \{ mc_{t+1}^n \} + (\beta\theta)^2 E_t \{ mc_{t+2}^n \} + \dots \right]$$

a skombinujeme s rovnicou v čase  $t$ . Dostaneme:

$$p_{H,t}^{FL} = (1 - \beta\theta) \left[ mc_t^n + \beta\theta \frac{E_t \{ p_{H,t+1}^{FL} \}}{(1 - \beta\theta)} \right] = (1 - \beta\theta) mc_t^n + \beta\theta E_t \{ p_{H,t+1}^{FL} \}$$

a pre ďalšie účely vynásobíme členom  $(1 - \tau)(1 - \theta)$ :

$$(1 - \tau)(1 - \theta) p_{H,t}^{FL} = (1 - \tau)(1 - \theta)(1 - \beta\theta) mc_t^n + (1 - \tau)(1 - \theta) \beta\theta E_t \{ p_{H,t+1}^{FL} \}. \quad (\text{R1})$$

**b) Prepis rovníc 1.56, 1.57 a 1.59.**

Rovnice si prepíšeme, aby sme ich v ďalšom kroku mohli postupne substituovať do rovnice R1:

- z rovnice 1.57 vyjadríme  $p_{H,t}^{FL}$ :

$$p_{H,t}^{FL} = \frac{\bar{p}_{H,t} - \tau p_{H,t}^{BL}}{1 - \tau}, \quad (R2)$$

- rovnicu 1.59 ani nie je treba upravovať, tak ju len odpíšeme:

$$p_{H,t}^{BL} = \bar{p}_{H,t-1} + \pi_{H,t-1} \quad (R3)$$

- a z rovnice 1.56 vyjadríme  $\bar{p}_{H,t}$ :

$$\bar{p}_{H,t} = \frac{p_{H,t} - \theta p_{H,t-1}}{1 - \theta}, \quad (R4)$$

**c) Postupné dosadzovanie do R1 a úpravy.**

Najprv dosadíme do rovnice R1 za  $p_{H,t}^{FL}$  a  $p_{H,t+1}^{FL}$  z rovnice R2 a upravíme do tvaru:

$$(1 - \theta)(\bar{p}_{H,t} - \tau p_{H,t}^{BL}) = (1 - \tau)(1 - \theta)(1 - \beta\theta)mc_t^n + (1 - \theta)\beta\theta E_t\{\bar{p}_{H,t+1} - \tau p_{H,t+1}^{BL}\},$$

ďalej do tejto rovnice dosadíme za  $p_{H,t}^{BL}$  a  $p_{H,t+1}^{BL}$  z rovnice R3:

$$(1 - \theta)(\bar{p}_{H,t} - \tau \bar{p}_{H,t-1} - \tau \pi_{H,t-1}) = \\ (1 - \tau)(1 - \theta)(1 - \beta\theta)mc_t^n + (1 - \theta)\beta\theta E_t\{\bar{p}_{H,t+1} - \tau \bar{p}_{H,t} - \tau \pi_{H,t}\}$$

a poslednou substitúciou je dosadenie za  $\bar{p}_{H,t}$ ,  $\bar{p}_{H,t+1}$  a  $\bar{p}_{H,t-1}$  z rovnice R4 a úpravy do tvaru:

$$p_{H,t} - \theta p_{H,t-1} - \tau p_{H,t-1} + \theta \tau p_{H,t-2} - (1 - \theta)\tau \pi_{H,t-1} = \\ = (1 - \tau)(1 - \theta)(1 - \beta\theta)mc_t^n + \beta\theta E_t\{p_{H,t+1}\} - \\ - \beta\theta^2 p_{H,t} - \beta\theta \tau p_{H,t} + \beta\theta^2 \tau p_{H,t-1} - (1 - \theta)\beta\theta \tau \pi_{H,t}.$$

Využitím definície  $mc_t^n \equiv mc_t + p_{H,t}$ , definície  $\pi_{H,t} \equiv p_{H,t} - p_{H,t-1}$  a využitím faktu:

$$(1 - \tau)(1 - \theta)(1 - \beta\theta) = 1 - \theta - \tau + \theta\tau - \beta\theta + \beta\theta\tau + \beta\theta^2 - \beta\theta^2\tau$$

získame rovnicu vo forme:

$$p_{H,t}(1 - 1 + \theta + \tau - \theta\tau + \beta\theta - \beta\theta\tau - \beta\theta^2 + \beta\theta^2\tau + \beta\theta^2 + \beta\theta\tau + \beta\theta\tau - \beta\theta^2\tau) + \\ + p_{H,t-1}(-\theta - \tau - \tau + \theta\tau - \beta\theta^2\tau - \beta\theta\tau + \beta\theta^2\tau) + p_{H,t-2}(\theta\tau + \tau - \theta\tau) = \\ = (1 - \tau)(1 - \theta)(1 - \beta\theta)mc_t + \beta\theta E_t\{p_{H,t+1}\}.$$

V zátvorkách tejto rovnice sčítame čo sa dá a použijeme substitúciu  $\phi \equiv \theta + \tau[1 - \theta(1 - \beta)]$ :

$$\phi p_{H,t} + \beta\theta p_{H,t} - \phi p_{H,t-1} - \tau p_{H,t-1} + \tau p_{H,t-2} = (1 - \tau)(1 - \theta)(1 - \beta\theta)mc_t + \beta\theta E_t\{p_{H,t+1}\} \\ \phi \pi_{H,t} = (1 - \tau)(1 - \theta)(1 - \beta\theta)mc_t + \beta\theta E_t\{\pi_{H,t+1}\} + \tau \pi_{H,t-1}$$

Posledným krokom bude vydelenie rovnice pomocou  $\phi$  a použitie troch substitúcií:

$$\begin{aligned}\lambda &\equiv (1 - \tau)(1 - \theta)(1 - \beta\theta)\phi^{-1} \\ \gamma_f &\equiv \beta\theta\phi^{-1} \\ \gamma_b &\equiv \tau\phi^{-1}.\end{aligned}$$

Finálny tvar hybridnej NKPC je teda v tvare:

$$\pi_{H,t} = \lambda mc_t + \gamma_f E_t \{\pi_{H,t+1}\} + \gamma_b \pi_{H,t-1}. \quad (\text{A.29})$$

## A.4 Apendix: Kanonická reprezentácia

### A.4.1 Odvodenie dynamickej IS krivky 1.84

Do Eulerovej rovnice 1.73 dosadíme za  $y_t$  aj  $E_t \{y_{t+1}\}$  z definície medzery výstupu  $y_t \equiv \tilde{y}_t + y_t^n$ :

$$\tilde{y}_t = E_t \{\tilde{y}_{t+1}\} + E_t \{y_{t+1}^n - y_t^n\} + \frac{\Psi q_t - r_t + \bar{\rho} + E_t \{\pi_{H,t+1}\}}{v_\alpha} + \alpha \Theta E_t \{\Delta y_{t+1}^*\}.$$

Dosadením za prirodzenú úroveň výstupu z rovnice 1.79 a úpravami získame:

$$\tilde{y}_t = E_t \{\tilde{y}_{t+1}\} + \Gamma_a E_t \{\Delta a_{t+1}\} - \alpha \Gamma_* E_t \{\Delta y_{t+1}^*\} + \frac{\Psi q_t - r_t + \bar{\rho} + E_t \{\pi_{H,t+1}\}}{v_\alpha} + \alpha \Theta E_t \{\Delta y_{t+1}^*\}.$$

Ďalej pomocou substitúcie:

$$r_t^n \equiv \bar{\rho} + v_\alpha \Gamma_a E_t \{\Delta a_{t+1}\} - v_\alpha \alpha \Gamma_* E_t \{\Delta y_{t+1}^*\} + v_\alpha \alpha \Theta E_t \{\Delta y_{t+1}^*\}$$

prepíšeme rovnicu do tejto podoby:

$$\tilde{y}_t = E_t \{\tilde{y}_{t+1}\} + \frac{\Psi q_t}{v_\alpha} - \frac{r_t - E_t \{\pi_{H,t+1}\} - r_t^n}{v_\alpha}. \quad (\text{A.30})$$

Upravovať budeme už len člen  $r_t^n$ , a to dosadením za  $\Gamma_*$  a úpravami do formy:

$$r_t^n \equiv \bar{\rho} + v_\alpha \Gamma_a E_t \{\Delta a_{t+1}\} + \alpha \varphi \Gamma_* E_t \{\Delta y_{t+1}^*\}$$

### A.4.2 Odvodenie rovnice akciového indexu 1.86

Pri flexibilných cenách ( $mc_t^n = 0$  a  $\pi_{H,t} = 0$ ) platí:

- rovnica 1.74:

$$q_t^n = E_t \{\alpha \Delta s_{t+1}^n\} - r_t^n + \bar{\rho} + \frac{\beta}{1 + \Lambda} E_t \{q_{t+1}^n\} + \frac{1 + \Lambda - \beta}{1 + \Lambda} E_t \{d_{t+1}^n\}, \quad (\text{A.31})$$

kde sme využili rovnicu 1.24

- rovnica 1.75 v čase  $t + 1$ :

$$d_{t+1}^n = y_{t+1}^n - \alpha s_{t+1}^n \quad (\text{A.32})$$

Za použitia 1.80, medznej prirážky  $\mu$  a faktu, že očakávaná hodnota nákladového šoku je nulová je ľahké dokázať, že odčítaním rovnice A.32 od rovnice 1.75 (vyjadrenej v čase  $t + 1$ ) dostaneme:

$$E_t \{d_{t+1} - d_{t+1}^n\} = E_t \{\tilde{y}_{t+1}\} \left(1 - \frac{\varphi + v_\alpha}{\mu}\right)$$

a odčítaním rovnice A.31 od rovnice 1.72 dostaneme:

$$\tilde{q}_t = \frac{\beta}{1 + \Lambda} E_t \{\tilde{q}_{t+1}\} - (r_t - r_t^n - E_t \{\pi_{H,t+1}\}) + \frac{1 + \Lambda - \beta}{1 + \Lambda} E_t \{d_{t+1} - d_{t+1}^n\},$$

kde  $\tilde{q}_t \equiv q_t - q_t^n$ . Po kombinovaní dvoch posledných rovníc získame:

$$\tilde{q}_t = \frac{\beta}{1 + \Lambda} E_t \{\tilde{q}_{t+1}\} - (r_t - r_t^n - E_t \{\pi_{H,t+1}\}) + \frac{\lambda_q}{1 + \Lambda} E_t \{\tilde{y}_{t+1}\} + \chi_t, \quad (\text{A.33})$$

pričom substituujeme  $\lambda_q \equiv (1 + \Lambda - \beta) \left(1 - \frac{\varphi + v_\alpha}{\mu}\right)$  a pridali sme aj nefundamentálny šok  $\chi_t$ .

## A.5 Súhrn rovníc odhadnutého modelu

Na tomto mieste ponúkame súhrn 18 odhadovaných rovníc:

$$\begin{aligned} \pi_{H,t} &= \kappa_\alpha \tilde{y}_t + \gamma_f E_t \{\pi_{H,t+1}\} + \gamma_b \pi_{H,t-1} + \varepsilon_t^p \\ \pi_t &= \pi_{H,t} + \alpha \Delta s_t \\ \tilde{y}_t &= y_t - y_t^n \\ \tilde{y}_t &= E_t \{\tilde{y}_{t+1}\} + \frac{\Psi q_t}{v_\alpha} - \frac{r_t - E_t \{\pi_{H,t+1}\} - r_t^n}{v_\alpha} \\ y_t^n &= \Gamma_a a_t - \alpha \Gamma_* y_t^* \\ y_t &= y_t^* + \frac{s_t}{v_\alpha} \\ \tilde{q}_t &= q_t - q_t^n \\ \tilde{q}_t &= \frac{\beta}{1 + \Lambda} E_t \{\tilde{q}_{t+1}\} - (r_t - r_t^n - E_t \{\pi_{H,t+1}\}) + \frac{\lambda_q}{1 + \Lambda} E_t \{\tilde{y}_{t+1}\} + \chi_t \\ q_t^n &= E_t \{\alpha \Delta s_{t+1}^n\} - r_t^n + \bar{\rho} + \frac{\beta}{1 + \Lambda} E_t \{q_{t+1}^n\} + \frac{1 + \Lambda - \beta}{1 + \Lambda} E_t \{d_{t+1}^n\} \\ r_t^n &\equiv \bar{\rho} + v_\alpha \Gamma_a E_t \{\Delta a_{t+1}\} + \alpha \varphi \Gamma_* E_t \{\Delta y_{t+1}^*\} \\ r_t &= r_t^* + E_t \{\Delta e_{t+1}\} + \iota_t \\ r_t &= \phi_r * r_{t-1} + (1 - \phi_r) * (\phi_\pi \pi_{H,t} + \phi_y \tilde{y}_t + \phi_e e_t) + \varepsilon_t^v \\ y_t^* &= c_{y^*} + \rho_{y_1^*} y_{t-1}^* + \rho_{y_2^*} \pi_{t-1}^* + \rho_{y_3^*} r_{t-1}^* + \varepsilon_t^{y^*} \\ \pi_t^* &= c_{\pi^*} + \rho_{\pi_1^*} y_{t-1}^* + \rho_{\pi_2^*} \pi_{t-1}^* + \rho_{\pi_3^*} r_{t-1}^* + \varepsilon_t^{\pi^*} \\ r_t^* &= c_{r^*} + \rho_{r_1^*} y_{t-1}^* + \rho_{r_2^*} \pi_{t-1}^* + \rho_{r_3^*} r_{t-1}^* + \varepsilon_t^{r^*} \\ a_t &= \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_t^a \\ \chi_t &= \rho_\chi \chi_{t-1} + \varepsilon_t^\chi \\ \iota_t &= \rho_\iota \iota_{t-1} + \varepsilon_t^\iota \end{aligned}$$

# Appendix B

## Tabuľky

premenná	význam
$B_t$	množstvo domáceho jedno–obdobového bondu splatného v čase $t$
$B_t^i$	množstvo jedno–obdobového bondu krajiny $i$ splatného v čase $t$ a držané domácou krajinou
$B_t^{(i,H)}$	množstvo domáceho jedno–obdobového bondu splatného v čase $t$ a držané krajinou $i$
$B_t^{(i,l)}$	množstvo jedno–obdobového bondu krajiny $l$ splatného v čase $t$ a držané krajinou $i$
$Q_t(k)$	nominálna cena akcie domácej firmy $k$
$Q_t$	reálna cena domáceho akciového indexu
$Q_t^n$	prirodzená cena domáceho akciového indexu
$\tilde{Q}_t$	medzera v cene domáceho akciového indexu
$Z_t(k, j)$	množstvo akcií domácej firmy $k$ držané domácou skupinou $j$
$Z_t(k)$	množstvo akcií domácej firmy $k$
$D_t(k)$	nominálny dividendový výnos z akcie domácej firmy $k$
$D_t$	reálna hodnota indexu dividendových výnosov domácej krajiny
$\Xi_t^i$	nominálny bilaterálny efektívny výmenný kurz medzi domácou a $i$ –tou krajinou
$\Xi_t^{(i,l)}$	nominálny bilaterálny efektívny výmenný kurz medzi $i$ –tou a $l$ –tou krajinou
$\Xi_t$	nominálny efektívny výmenný kurz
$\Upsilon_{i,t}$	reálny bilaterálny efektívny výmenný kurz $\equiv \frac{\Xi_t^i P_t^i}{P_t}$
$\Omega_t(j)$	nominálne finančné bohatstvo domácej skupiny $j$
$F_{t,t+1}(j)$	diskontný faktor state–contingent bondov kúpených v čase $t$ a splatných v čase $t + 1$
$T_t(j)$	reálne vládne dane uvalené na domácu skupinu $j$
$H_t(j)$	nominálne ľudské bohatstvo domácej skupiny $j$
$r_t$	nominálna úroková miera domácej krajiny
$r_t^*$	nominálna úroková miera zahraničnej krajiny
$r_t^n$	prirodzená reálna úroková miera

Tabuľka B.1: Premenné finančného trhu

premenná	význam
$P_{H,t}(k)$	výrobná cena domáceho statku $k$
$P_{H,t}$	domáce PPI
$P_{H,t}^i$	PPI krajiny $i$ statkov vyrobených v krajine $i$
$P_{H,t}^*$	domáce PPI v zahraničnej mene
$P_{i,t}(k)$	výrobná cena statku $k$ zahraničnej krajiny $i$ (v domácej mene)
$P_{i,t}^i(k)$	výrobná cena statku $k$ zahraničnej krajiny $i$ (v mene krajiny $i$ )
$P_{i,t}$	PPI krajiny $i$ (v domácej mene)
$P_{i,t}^i$	PPI krajiny $i$ (v mene krajiny $i$ )
$P_{F,t}$	PPI statkov importovaných do domácej krajiny (v domácej mene)
$P_{F,t}^i$	PPI importov krajiny $i$
$P_{F,t}^*$	zahraničné PPI v zahraničnej mene
$P_t$	domáci index CPI
$P_t^i$	index CPI krajiny $i$
$P_t^*$	svetový cenový index CPI/PPI
$\bar{p}_{H,t}$	log–lin. optimálna cena domácich firiem
$p_{H,t}^{FL}$	log–lin. optimálna cena domácich ex–ante firiem
$p_{H,t}^{BL}$	log–lin. optimálna cena domácich ex–post firiem
$\Pi_{H,t}$	hrubá miera (PPI) inflácie domácich producentov
$\Pi_t$	hrubá miera (CPI) inflácie domácich spotrebiteľov
$\Pi_t^*$	hrubá miera (CPI) zahraničnej inflácie
$S_{i,t}$	vzájomná výmenná relácia medzi domácou a $i$ –tou krajinou
$S_t$	efektívna výmenná relácia domácej krajiny
$S_t^i$	efektívna výmenná relácia zahraničnej krajiny $i$

Tabuľka B.2: Ceny, cenové indexy a výmenné relácie

premenná	význam
$C_{H,t}(k, j)$	dopyt domácej skupiny $j$ po statku domácej firmy $k$
$C_{H,t}(j)$	dopyt domácej skupiny $j$ po domácich finálnych statkoch
$C_{i,t}(k, j)$	dopyt domácej skupiny $j$ po statku firmy $k$ krajiny $i$
$C_{i,t}(j)$	dopyt domácej skupiny $j$ po všetkých finálnych statkoch krajiny $i$
$C_{F,t}(j)$	dopyt domácej skupiny $j$ po zahraničných finálnych statkoch – po importoch
$C_t(j)$	celkový dopyt domácej skupiny $j$
$C_t$	domáci index spotreby
$C_t^*$	zahraničný index spotreby
$C_{H,t}^i(k)$	dopyt krajiny $i$ po statku domácej firmy $k$
$C_t^i$	index spotreby krajiny $i$

Tabuľka B.3: Dopyty a spotrebné indexy

premenná	význam
$N_t(j)$	množstvo ponúkanej práce domácou skupinou $j$
$W_t$	priemerná nominálna mzda domácej krajiny
$N_t(k)$	ponúkaná práca domácou firmou $k$
$Y_t(k)$	výstup domácej firmy $k$
$Y_t$	výstup domácej krajiny
$Y_t^n$	prirodzená úroveň výstupu domácej krajiny
$Y_t^*$	zahraničná produkcia
$\tilde{Y}_t$	domáca medzera výstupu
$\rho_t$	relatívna cenová disperzia medzi domácimi firmami
$A_t$	domáci technologický šok
$MC_t$	reálne domáce medzné náklady

Tabuľka B.4: Ostatné modelové premenné

parameter	význam
$\gamma \in [0, 1]$	pravdepodobnosť úmrtia domácnosti
$\beta \in [0, 1]$	diskontný faktor
$\alpha \in [0, 1]$	miera otvorenosti ekonomiky
$\omega > 0$	elasticita substitúcie medzi domácimi a zahraničnými statkami
$\varepsilon > 1$	elasticita substitúcie medzi rôznymi statkami resp. firmami vrámci jednej krajiny
$\zeta > 0$	elasticita substitúcie medzi statkami rôznych krajín
$\theta \in [0, 1]$	cenová rigidita (Calvo parameter)
$\tau \in [0, 1]$	podiel ex-post firiem
$\Lambda > 0$	podmienená kovariancia medzi $F_{t,t+1}$ a $\Pi_{t+1} \frac{Q_{t+1} + D_{t+1}}{Q_t}$
$\varphi > 0$	inverzia rovnovážnej hodnoty Frischovej elasticity v ponuke práce
$\vartheta \in [0, 1]$	optimálne dotácie volené vládou (nemodelujeme)
$\mu > 0$	čistá prirážka firiem nad medzné náklady
$\phi_\pi \in \mathbb{R}$	citlivosť úrokovej sadzby na infláciu
$\phi_y \in \mathbb{R}$	citlivosť úrokovej sadzby na medzeru výstupu
$\phi_e \in \mathbb{R}$	citlivosť úrokovej sadzby na nominálny výmenný kurz
$\rho_i \in [0, 1]$	parametre perzistencie šokov a parametre VAR modelu (v závislosti na voľbe $i$ )

Tabuľka B.5: Parametre modelu

parameter	funkčný tvar
$\lambda$	$(1 - \tau)(1 - \theta)(1 - \beta\theta)\phi^{-1}$
$\gamma_f$	$\beta\theta\phi^{-1}$
$\gamma_b$	$\tau\phi^{-1}$
$\phi$	$\theta + \tau[1 - \theta(1 - \beta)]$
$\eta$	$\zeta + (1 - \alpha)(\omega - 1)$
$v_\alpha$	$\frac{1}{(1 - \alpha) + \alpha\eta}$
$\bar{\rho}$	$\ln(1 + r)$
$\Psi$	$[1 - \beta(1 - \gamma)] \frac{\gamma}{1 - \gamma} \frac{\Omega}{PC}$
$\varphi$	$\frac{N}{1 - N}$
$\Gamma_a$	$\frac{1 + \varphi}{v_\alpha + \varphi}$
$\Gamma_*$	$\frac{v_\alpha \Theta}{v_\alpha + \varphi}$
$\Theta$	$(\zeta - 1) + (1 - \alpha)(\omega - 1) = \eta - 1$
$\kappa_\alpha$	$\lambda(\varphi + v_\alpha)$
$\lambda_q$	$(1 + \Lambda - \beta) \left(1 - \frac{\varphi + v_\alpha}{\mu}\right)$
$\mu$	$\frac{1 - MC}{MC} = \frac{1}{\varepsilon - 1}$

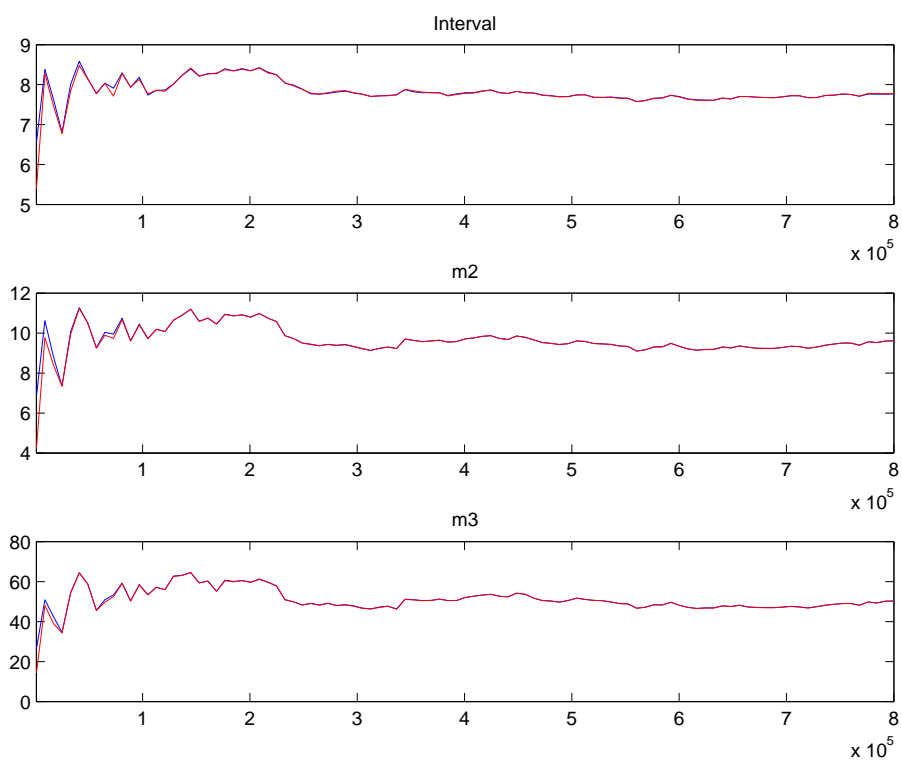
Tabuľka B.6: Parametre ako funkcie ostatných parametrov

	$\varepsilon^{\pi^*}$	$\varepsilon^{r^*}$	$\varepsilon^{y^*}$	$\varepsilon^{\lambda}$	$\varepsilon^l$	$\varepsilon^p$	$\varepsilon^a$	$\varepsilon^{\lambda}$
$\varepsilon^{\pi^*}$	1	0.19	0.35	0.27	0.12	0.11	0.20	-0.44
$\varepsilon^{r^*}$		1	0.75	0.14	-0.22	-0.12	0.69	0.14
$\varepsilon^{y^*}$			1	0.34	-0.13	-0.09	0.64	-0.07
$\varepsilon^{\lambda}$				1	0.15	-0.47	0.12	-0.24
$\varepsilon^l$					1	-0.03	-0.31	-0.31
$\varepsilon^p$						1	-0.14	-0.46
$\varepsilon^a$							1	-0.03
$\varepsilon^{\lambda}$								1

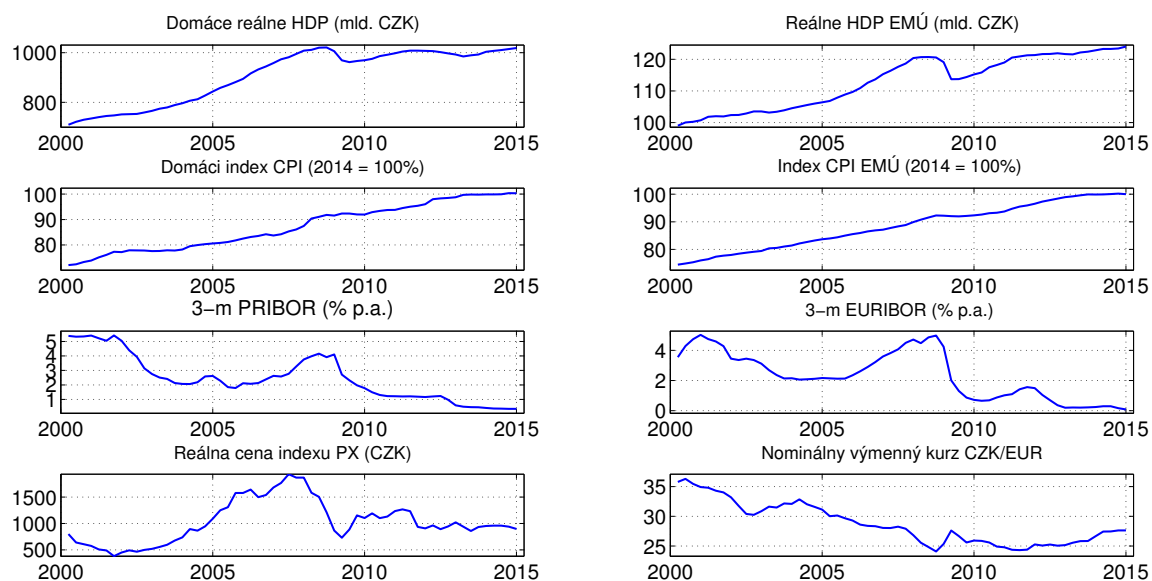
Tabuľka B.7: Korelačná matica šokov odhadnutého modelu

## Apendix C

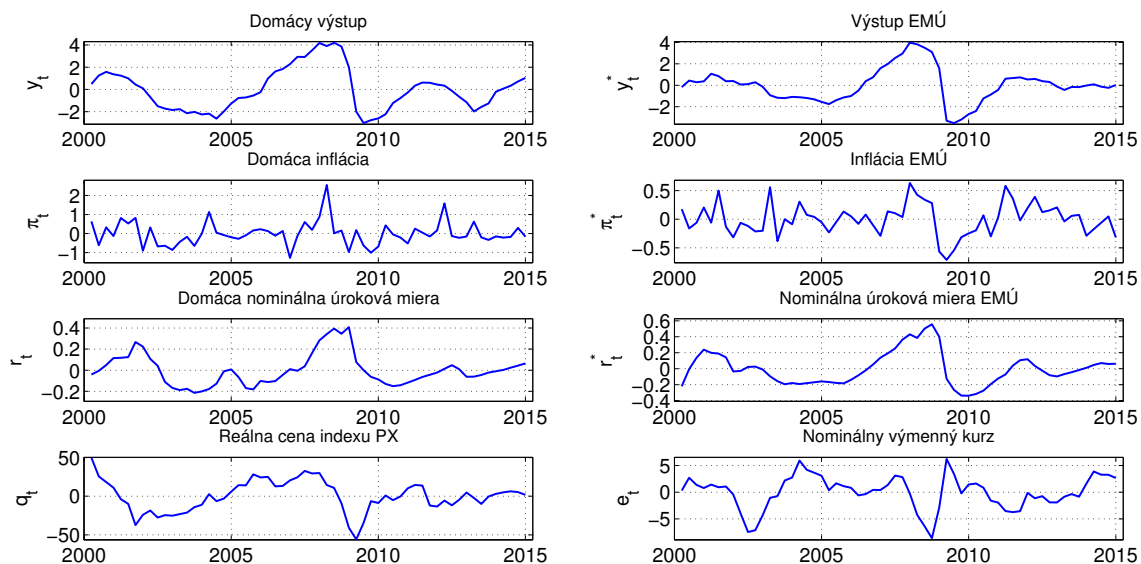
## Obrázky



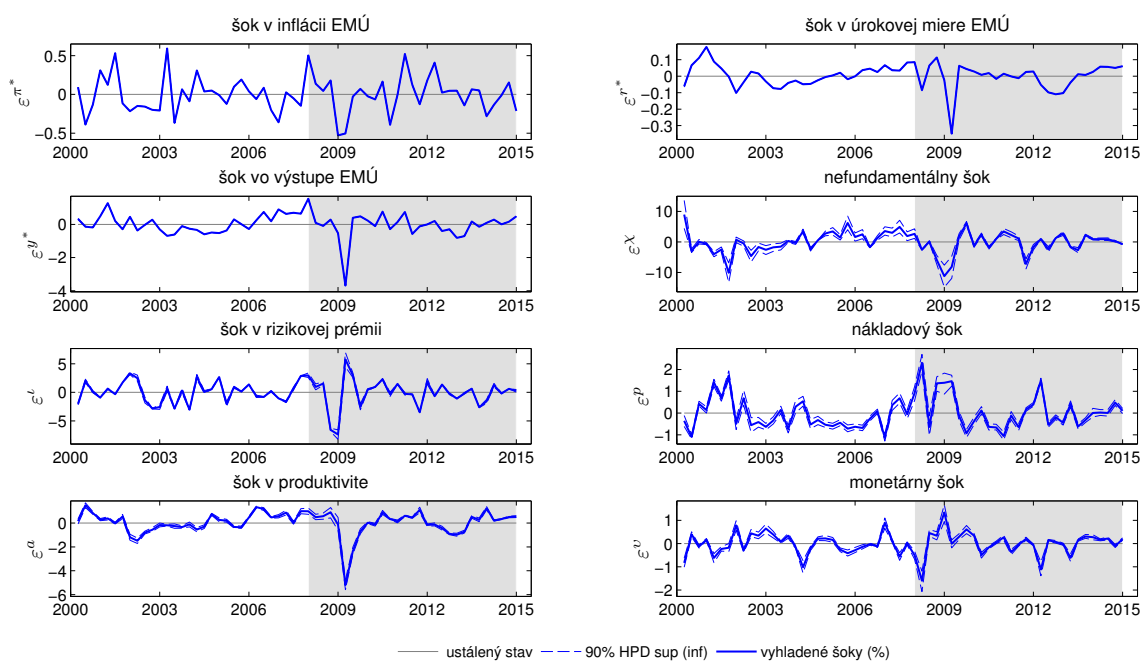
Obr. C.1: Konvergenčná diagnostika MCMC algoritmu



Obr. C.2: Originálne dáta



Obr. C.3: Pozorované premenné ako % odchýlky od ustálených stavov



Obr. C.4: Vyhladené exogénne šoky

