MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Bakalářská práce

BRNO 2016 TEREZA VEŘMIŘOVSKÁ

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Integrální transformace

Bakalářská práce

Tereza Veřmiřovská

Vedoucí práce: Mgr. Petr Hasil, Ph.D. **Brno 2016**

Bibliografický záznam

Autor:	Tereza Veřmiřovská Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Integrální transformace
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika
Vedoucí práce:	Mgr. Petr Hasil, Ph.D.
Akademický rok:	2015/2016
Počet stran:	$ix + 37$
Klíčová slova:	Laplaceova transformace; konvoluce; dekonvoluce; Fourierovy řady; Fourierova transformace

Bibliographic Entry

Author:	Tereza Veřmiřovská Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Integral transformations
Degree Programme:	Mathematics
Field of Study:	Financial and Insurance Mathematics
Supervisor:	Mgr. Petr Hasil, Ph.D.
Academic Year:	2015/2016
Number of Pages:	$ix + 37$
Keywords:	Laplace transform; Convolution; Deconvolution; Fourier Series; Fourier transform

Abstrakt

V této bakalářské práci se věnujeme integrálním transformacím a jejich aplikacím na řešení diferenciálních rovnic. V Kapitole 1 definujeme Laplaceovu transformaci a uvedeme základní vlastnosti, kterou následně aplikujeme na řešení diferenciálních rovnic. Zaměříme se také na konvoluci. Dále pak popíšeme teorii Fourierových řad, které budeme potřebovat v následující kapitole pro zavedení Fourierovy transformace a popsání jejich vlastností, což také použijeme při řešení diferenciálních rovnic. Všechny tyto kapitoly jsou doplněny o ilustrační příklady.

Abstract

In this thesis, we study integral transforms and their applications in solving of differential equations. In Chapter 1, we define Laplace transform and state its basic properties, which are then applied to differential equations. We also focus on the convolution. Next we describe the theory of Fourier series, which we will need in the subsequent chapter to introduce Fourier transform and to describe its properties, which are also used in solving of differential equations. All the chapters are supplemented by illustrative examples.

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2015/2016

Ústav: Ústav matematiky a statistiky

Studentka: Tereza Veřmiřovská

Program: Matematika

Obor: Finanční a pojistná matematika

Ředitel *Ústavu matematiky a statistiky* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s tématem:

Téma práce: Integrální transformace

Téma práce anglicky: Integral transformations

Oficiální zadání:
Cílem práce je zpracovat teorii o integrálních transformacích, jejich vlastnostech a využití. Teorie by měla být doplněna ilustračními příklady. Zvláštní důraz by měl být kladen na Laplaceouvu a Fourierovu transformaci.

Literatura:
SLOVÁK, Jan, Martin PANÁK a Michal BULANT. *Matematika drsně a svižně*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2013. 773 s. ISBN 978-80-210-6307-5. doi:10.5817/CZ.MUNI.O210-6308-2013.

P.P.G. Dyke, An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series, Springer, London, 2004, 250 s., ISBN 1-85233-015-5.

Jazyk závěrečné práce:

Vedoucí práce: Mgr. Petr Hasil, Ph.D.

Datum zadání práce: 1. 6. 2015

V Brně dne: 20. 10. 2015

Souhlasím se zadáním (podpis, datum): 18.11.2015

Tereza Veřmiřovská **studentka**	Mgr. Petr Hasil, Ph.D. **vedoucí práce**	v.z. Pavel Hrabák prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc. **ředitel Ústavu matematiky a statistiky**

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat Mgr. Petru Hasilovi, Ph.D. za odborné vedení bakalářské práce, ochotu a čas strávený při konzultacích.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 24. května 2016

.....

Tereza Veřmiřovská

Obsah

Úvod ..... **ix**

Kapitola 1. Laplaceova transformace **1**
1.1 Základní definice a věty 1
1.2 Základní vlastnosti Laplaceovy transformace 3
1.2.1 Linearita 3
1.2.2 Laplaceova transformace derivace 4
1.2.3 Laplaceova transformace integrálu 5
1.2.4 Laplaceova transformace posunu (translace) 5
1.2.5 Obraz periodické funkce 6
1.2.6 Tabulka vybraných Laplaceových transformací funkcí 7
1.3 Limitní věty 7
1.4 Inverzní Laplaceova transformace 8
1.4.1 Vlastnosti inverzní Laplaceovy transformace 8
1.4.2 Tabulka vybraných inverzních Laplaceových transformací 9
1.5 Příklady 9
1.5.1 Příklady k procvičení 10
1.6 Aplikace Laplaceovy transformace 11
1.6.1 Příklady k procvičení 13

Kapitola 2. Konvoluce **14**
2.1 Základní definice 14
2.2 Vlastnosti konvoluce 15
2.2.1 Konvoluční teorém 17
2.3 Dekonvoluce 17
2.4 Příklady 18
2.4.1 Příklady k procvičení 18

Kapitola 3. Fourierovy řady **19**
3.1 Fourierova řada vzhledem k obecné posloupnosti 19
3.2 Fourierova řada vzhledem k trigonometrickému systému 20
3.2.1 Komplexní Fourierova řada 23
3.3 Příklady 24

3.3.1 Příklady k procvičení 25

Kapitola 4. Fourierova transformace 26

4.1 Základní definice 26

4.2 Základní vlastnosti Fourierovy transformace 27

4.2.1 Linearita 29

4.2.2 Fourierova transformace a derivace 29

4.2.3 Fourierova transformace konvoluce 30

4.2.4 Základní identita Fourierovy transformace 31

4.3 Příklady 31

4.3.1 Příklady k procvičení 32

4.4 Aplikace Fourierovy transformace 33

4.4.1 Příklady k procvičení 34

Závěr 35

Seznam použité literatury 36

Úvod

Obecně jsou známa zobrazení, která přiřazují funkcím jiné funkce, např. funkci její derivaci, primitivní funkci, pokud existují. Takové funkce se nazývají transformacemi, protože transformují původní funkce na jiné. V této bakalářské práci se budeme zabývat integrálními transformacemi funkcí, které se obecně definují jako

$$T\big(f(s)\big) = \int_a^b f(t)K(s,t)\,\mathrm{d}t,$$

kde $K(s,t)$ je tzv. jádro transformace a (a,b) je vhodný interval. Tyto transformace se hodí například pro řešení diferenciálních rovnic, čemuž se tato práce rovněž věnuje.

Obsahově je práce členěna do čtyř kapitol. První kapitola se zabývá Laplaceovou transformací. V jejích podkapitolách se podíváme na základní definici, věty a vlastnosti této transformace. Zaměříme se také na inverzní Laplaceovu transformaci. Poté aplikujeme tyto transformace na řešení diferenciálních rovnic, které jsou ve tvaru $ay''(t) + + by'(t) + y(t) = f(t)$.

Ve druhé kapitole se čtenář dozví, co je to konvoluce a jaká je její souvislost s Laplaceovou transformací. Zmíníme také dekonvoluci, kterou ale pouze krátce popíšeme a předvedeme na obrázku.

Třetí kapitola se věnuje teorii Fourierových řad aplikovanou nejprve na obecný ortogonální systém, poté na trigonometrický systém. Také bude zaveden pojem komplexní Fourierovy řady pro lepší návaznost na následující kapitolu.

Ta se nazývá Fourierova transformace a její první podkapitoly se zabývají definicí této transformace a jejími základními vlastnostmi. Další podkapitola se zabývá aplikací Fourierovy transformace na řešení diferenciálních rovnic. Všechny tyto kapitoly jsou doplněny řešenými příklady i několika neřešenými příklady s výsledky na procvičení.

Kapitola 1

Laplaceova transformace

1.1 Základní definice a věty

Jednou z nejznámějších integrálních transformací je bezesporu Laplaceova transformace. V této kapitole si nejdříve uvedeme její definici a podmínku pro existenci, potom se budeme zabývat jejími základními vlastnostmi a limitními větami a nakonec se zaměříme na aplikaci Laplaceovy transformace při řešení diferenciálních rovnic. Teorii k této kapitole jsme čerpali ze zdrojů [6], [10] a [11].

Definice 1. Uvažujme funkci f, která je komplexní funkcí reálné proměnné $t \in \mathbb{R}$, tj. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, a komplexní proměnnou $s = x + iy$. Předpokládejme, že nevlastní integrál

$$\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} \, \mathrm{d}t \tag{1.1}$$

existuje a má konečnou hodnotu pro alespoň jedno s. Pak integrál (1.1) nazýváme **Laplaceův integrál** funkce f.

Příklad 1.1. Spočtěte Laplaceův integrál funkce $f(t) = e^{at}$, kde $a \in \mathbb{C}$.

Řešení.
Počítáme Laplaceův integrál (1.1), kde za $f(t)$ dosadíme e^{at}.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(t) \cdot \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{at} \cdot \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t \\
&= \lim_{\alpha \to \infty} \int_0^\alpha \mathrm{e}^{(a-s)t} \, \mathrm{d}t \\
&= \lim_{\alpha \to \infty} \frac{\mathrm{e}^{(a-s)\alpha}}{a-s} - \frac{1}{a-s} \\
&= \frac{1}{s-a}.
\end{aligned}$$

Obecně tento integrál nemusí existovat pro žádná s, nebo jen pro velmi málo těchto bodů. Nyní si uvedeme velkou třídu funkcí, pro které je Laplaceova transformace definována na neomezených intervalech.

Definice 2. Buď f komplexní funkce reálné proměnné t, $t \in (-\infty, \infty)$. Buď $M \subset \mathbb{C}$ množina všech s, pro něž je Laplaceův integrál (1.1) konvergentní. Pak komplexní funkci $F(s)$ definovanou vztahem

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} \, \mathrm{d}t, \quad s \in M, \tag{1.2}$$

nazýváme Laplaceův obraz funkce $f(t)$. Dané zobrazení, které přiřazuje funkci f její Laplaceův obraz F, nazýváme **Laplaceovou transformací** a značíme $\mathscr{L}\big(f(t)\big) = F(s)$.

Nyní uvedeme větu, která uvádí podmínku pro existenci Laplaceovy transformace.

Věta 1.1. *Nechť $f(t)$ je po částech spojitá funkce na intervalu $(0, \infty)$ a platí odhad*

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{\alpha t} \tag{1.3}$$

pro nějaké $M, \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall t \in (0, \infty)$. Pak transformace $f(t)$ existuje pro všechna $s > \alpha$.

Důkaz. Víme, že integrál existuje, protože $f(t)\mathrm{e}^{-st}$ je integrovatelná funkce, můžeme tedy odhadnout absolutní hodnotu transformace dle vztahu (1.2) s využitím předpokladů věty.

$$\begin{aligned} |F(s)| &= \left| \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} \, \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^\infty |f(t)| \cdot e^{-st} \, \mathrm{d}t \leq \int_0^\infty M \cdot e^{\alpha t} \cdot e^{-st} \\ &= M \int_0^\infty e^{(\alpha - s)t} < \infty, \qquad \text{jestliže } s > \alpha, \end{aligned}$$

tím je věta dokázána. □

Jako další se budeme zabývat Lerchovou větou o jednoznačnosti Laplaceovy transformace. Pro zkonstruování jejího důkazu ale budeme potřebovat větu Hausdorffovu, proto si nejdříve uvedeme ji. Protože Hausdorffovu větu budeme potřebovat pouze pro důkaz Lerchovy věty, samotný důkaz Hausdorffovy věty nebudeme uvádět.

Věta 1.2 (Hausdorffova)**.** *Nechť f a g jsou spojité funkce na intervalu $[a, b]$. Je-li*

$$\int_a^b x^r \cdot f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b x^r \cdot g(x) \, \mathrm{d}x$$

pro $\forall r \geq 0$, pak $f(x) \equiv g(x)$.

Nyní už slíbená Lerchova věta.

Věta 1.3 (Lerchova)**.** *Nechť $f(t)$ je spojitá funkce na $\mathbb{R}$, $f(t) = 0$ pro $t \leq 0$. Nechť $f(t)$ splňuje odhad $|f(t)| \leq M \cdot e^{\alpha t}$. Nechť existují konstanty $a > \alpha$ a $b > 0$ tak, že $\mathscr{L}\big(f(a + nb)\big) = 0$ pro $\forall n \geq 0$. Pak $\mathscr{L}\big(f(t)\big) \equiv 0$ a tedy $f(t) \equiv 0$.*

Důkaz. Lerchova věta nám říká, že $0 = \mathscr{L}(f(a + nb))$. Toto budeme upravovat pomocí vzorce (1.2) pro Laplaceovu transformaci.

$$\begin{aligned} 0 = \mathscr{L}\big(f(a + nb)\big) &= \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-(a+bn)t} \, \mathrm{d}t, \quad \text{pro } \forall n \Rightarrow f(t) = 0 \\ &= \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-bnt} \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Položme $\alpha(t) = f(t)\mathrm{e}^{-at}$, potom

$$= \int_0^\infty \alpha(t)\mathrm{e}^{-bnt}\,\mathrm{d}t.$$

Provedeme substituci $u = \mathrm{e}^{-bt}$, tedy

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{b}\cdot\ln u, \\ \mathrm{d}t &= -\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

přičemž se změní i meze

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad u = 1, \\ t = \infty \quad &\Rightarrow \quad u = 0 \end{aligned}$$

a pokračujeme ve výpočtu integrálu

$$= -\frac{1}{b}\cdot\int_1^0 \alpha\left(-\frac{1}{b}\ln(u)\right)u^n\frac{\mathrm{d}u}{u},$$

položme $\beta(u) = \alpha\left(-\frac{1}{b}\ln(u)\right)$, potom

$$= \frac{1}{b}\cdot\int_0^1 \beta(u)u^{n-1}\,\mathrm{d}u.$$

$\beta(0) = 0$, $\beta(1) = f(0)$, $\beta(u)$ je spojitá na intervalu $[0,1]$.

Nyní využijeme Hausdorffovu větu 1.2,

$$\forall n \geq 0 \Rightarrow \beta(u) \equiv 0 \Rightarrow \alpha(t) \equiv 0 \Rightarrow f(t) \equiv 0,$$

což jsme chtěli dokázat. □

1.2 Základní vlastnosti Laplaceovy transformace

1.2.1 Linearita

Jednou ze základních vlastností Laplaceovy transformace je linearita, kterou si ukážeme jako první, abychom ji mohli nadále využívat.

Věta 1.4. *Nechť $f_1(t)$ a $f_2(t)$ jsou funkce, pro které existuje Laplaceova transformace, a nechť a, b jsou libovolné konstanty. Potom*

$$\mathscr{L}\left(af_1(t) + bf_2(t)\right) = a\mathscr{L}\left(f_1(t)\right) + b\mathscr{L}\left(f_2(t)\right). \tag{1.4}$$

Důkaz. Ve větě předpokládáme, že pro funkce $f_1(t)$ a $f_2(t)$ existuje Laplaceova transformace, můžeme tedy počítat podle definice Laplaceovy transformace (1.2).

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left(af_1(t)+bf_2(t)\right) &= \int_0^\infty \left(af_1(t)+bf_2(t)\right)\cdot \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left(af_1(t)\mathrm{e}^{-st}+bf_2(t)\mathrm{e}^{-st}\right)\mathrm{d}t \\
&= a\int_0^\infty f_1(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t + b\int_0^\infty f_2(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= a\mathscr{L}\left(f_1(t)\right)+b\mathscr{L}(f_2(t)).
\end{aligned}$$

□

1.2.2 Laplaceova transformace derivace

Laplaceova transformace má takovou vlastnost, že pokud ji aplikujeme na derivovanou funkci, přemění derivaci v násobení.

Věta 1.5. *Nechť $f(t)$ a $f'(t)$ jsou spojité pro $t \geq 0$ a splňují odhad (1.3). Potom*

$$\mathscr{L}\left(f'(t)\right) = s\mathscr{L}\left(f(t)\right) - f(0).$$

Důkaz. Protože ve větě předpokládáme, že funkce $f(t)$ a $f'(t)$ splňují odhad (1.3), a tedy pro ně existuje Laplaceova transformace, můžeme ji počítat. Pro výpočet integrálu použijeme metodu per partes.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left(f'(t)\right) = \int_0^\infty f'(t)\cdot \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t &= \left|\begin{array}{ll} u' = f'(t) & v = \mathrm{e}^{-st} \\ u = f(t) & v' = -s\mathrm{e}^{-st} \end{array}\right| \\
&= \left[f(t)\cdot \mathrm{e}^{-st}\right]_0^\infty + \int_0^\infty s\cdot \mathrm{e}^{-st}\cdot f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -f(0) + s\mathscr{L}\left(f(t)\right) \\
&= s\mathscr{L}\left(f(t)\right) - f(0).
\end{aligned}$$

□

Poznámka. Pro derivaci 2. řádu platí

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left(f''(t)\right) &= s\mathscr{L}\left(f'(t)\right) - f'(0) \\
&= s\left[s\mathscr{L}\left(f(t)\right) - f(0)\right] - f'(0) \\
&= s^2\mathscr{L}\left(f(t)\right) - sf(0) - f'(0).
\end{aligned}$$

Tedy obecně pro derivace n-tého řádu platí

$$\mathscr{L}\left(f^{(n)}(t)\right) = s^n\mathscr{L}\left(f(t)\right) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

1.2.3 Laplaceova transformace integrálu

Nyní si ukážeme, jak se Laplaceova transformace chová, použijeme-li ji pro transformaci integrálu.

Věta 1.6. *Předpokládejme, že je funkce $f(t)$ integrovatelná a existuje její Laplaceova transformace $F(s)$. Pak platí*

$$\mathscr{L}\left(\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right) = \frac{1}{s}F(s), \quad \textit{kde } F(s) = \mathscr{L}(f(t)).$$

Důkaz. Nechť

$$g(t) = \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u, \quad g(0) = 0,$$

pak

$$g'(t) = f(t).$$

Pomocí Věty 1.5 o Laplaceově transformaci derivace můžeme dokázat, že

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left(f(t)\right) &= \mathscr{L}\left(g'(t)\right)\\ &= s\mathscr{L}\left(g(t)\right) - g(0)\\ &= s\mathscr{L}\left(g(t)\right) \Rightarrow \mathscr{L}\left(g(t)\right) = \frac{1}{s}\mathscr{L}\left(f(t)\right).\end{aligned}$$

□

1.2.4 Laplaceova transformace posunu (translace)

Laplaceova transformace posunu se může realizovat buď v proměnné s nebo v proměnné t.

I. **Posun v proměnné s**

Jedná se o posun $F(s) \to F(s-a)$.

Věta 1.7. *Nechť $F(s) = \mathscr{L}\left(f(t)\right)$. Potom platí*

$$\mathscr{L}\left(f(t)\mathrm{e}^{at}\right) = F(s-a),$$

tedy

$$\mathscr{L}^{-1}\left(F(s-a)\right) = f(t)\mathrm{e}^{at}.$$

Důkaz. Důkaz provedeme jednoduchým dosazením do vzorce (1.2) Laplaceovy transformace.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left(f(t)\mathrm{e}^{at}\right) &= \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t\\ &= F(s-a).\end{aligned}$$

□

II. **Posun v proměnné** t

Druhou možností posunu, a to v proměnné t, je jednotkový skok velikosti a, tedy $f(t) \to f(t-a)$. Pro tuto transformaci budeme potřebovat znát Heavisideovu funkci, proto si ji zadefinujeme.

Definice 3. Heavisideova funkce (funkce jednotkového skoku v bodě t) je definovaná jako

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Věta 1.8. *Nechť $f(t)$ je funkce, pro kterou existuje Laplaceova transformace $F(s)$, potom*

$$\mathscr{L}\big(f(t-a)H(t-a)\big) = F(s)e^{-as}.$$

Důkaz. Tuto větu si dokážeme pomocí substituční metody řešení integrálu a již známé Heavidiseovy funkce.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\big(f(t-a)H(t-a)\big) &= \int_0^\infty f(t-a)H(t-a)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^\infty f(t-a)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t, \quad \text{subst. } u = t-a \\
&= \int_0^\infty f(u)\mathrm{e}^{-s(u+a)}\,\mathrm{d}u \\
&= \mathrm{e}^{-as}\int_0^\infty f(u)\mathrm{e}^{-su}\,\mathrm{d}u \\
&= \mathrm{e}^{-as}F(s).
\end{aligned}$$

□

1.2.5 Obraz periodické funkce

Další funkcí, kterou lze transformovat, je periodická funkce. Pojem periodické funkce je čtenáři jistě znám, pro jistotu ale připomeneme z knihy [3].

Definice 4. Funkce f se nazývá **periodická** s periodou $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, jestliže platí, že pro každé $x \in D(f)$ je také $x \pm p \in D(f)$ a $f(x+p) = f(x-p) = f(x)$.

Věta 1.9. *Nechť $f(t)$ je funkce s periodou $p > 0$, takže $f(t) = f(t+p)$. Potom*

$$\mathscr{L}\big(f(t)\big) = \frac{\int_0^p e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t}{1-e^{-sp}}.$$

Důkaz. V důkazu budeme opět vycházet ze základní definice Laplaceovy transformace (1.2) a využijeme periodicitu funkce $f(t)$.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\big(f(t)\big) &= \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^p f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t + \int_p^{2p} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_{(n-1)p}^{np} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t + \cdots.
\end{aligned}$$

Tato řada je konvergentní, což nám zaručuje podmínka pro existenci Laplaceovy transformace (1.3). Každý z dílčích integrálů lze upravit, my budeme počítat s n-tým integrálem pomocí substituce $u = t - (n-1)p$ jako

$$\begin{aligned}\int_{(n-1)p}^{np} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t &= \int_0^p f(u)\mathrm{e}^{-s(u+(n-1)p)}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^p f(u)\mathrm{e}^{-su}\mathrm{e}^{-s(n-1)p}\,\mathrm{d}u \\ &= \mathrm{e}^{-s(n-1)p}\int_0^p f(u)\mathrm{e}^{-su}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Když toto aplikujeme na všechny integrály z řady, dostaneme

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t &= (1+\mathrm{e}^{-sp}+\mathrm{e}^{-2sp}+\cdots+\mathrm{e}^{-nsp}+\cdots)\int_0^p f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sp}}\int_0^p f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Všimněme si, že výraz před integrálem je geometrická řada s kvocientem e^{-sp}, proto jsme ji zapsali ve tvaru součtu této řady. □

1.2.6 Tabulka vybraných Laplaceových transformací funkcí

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\big(f(t)\big)$	$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\big(f(t)\big)$
1	$\frac{1}{s}$	$t\sin\omega t$	$\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\cosh\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$\mathrm{e}^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\mathrm{e}^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$		

Tabulka 1.1: Tabulka vybraných Laplaceových transformací

1.3 Limitní věty

V této podkapitole si uvedeme základní limitní věty pro Laplaceovu transformaci. Ty jsou převzaty z knihy [9], kde najdeme i důkazy k těmto větám. První větu o limitě lze

považovat za nutnou podmínku pro existenci Laplaceova obrazu. Tedy tuto podmínku musí splňovat každý Laplaceův obraz.

Věta 1.10 (První věta o limitě)**.** *Nechť existuje Laplaceův obraz funkce $f(t)$, $\mathscr{L}\left(f(t)\right) = F(s)$. Pak pro $s > 0$ platí*

$$\lim_{s\to+\infty} F(s) = 0.$$

Věta 1.11 (Druhá věta o limitě)**.** *Nechť $\mathscr{L}\left(f(t)\right) = F(s)$ a existuje $\lim_{t\to 0} f(t)$. Pak pro $x > 0$ platí*

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s).$$

Věta 1.12 (Třetí věta o limitě)**.** *Nechť $\mathscr{L}\left(f(t)\right) = F(s)$ a existuje $\lim_{t\to\infty} f(t)$. Pak pro $x > 0$ platí*

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s).$$

1.4 Inverzní Laplaceova transformace

K velkému množství operací můžeme najít operaci inverzní. Ke sčítání je inverzní operací odčítání, k násobení dělení, k derivaci integrál. Nejinak je tomu i u Laplaceovy transformace. Informace o této transformaci jsme našli v [6].

Definice 5. Nechť $f(t)$ je funkce s Laplaceovou transformací $F(s)$, tedy $\mathscr{L}\left(f(t)\right) = F(s)$. Potom **inverzní Laplaceova transformace** je definována jako

$$\mathscr{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$$

a je dána jednoznačně.

1.4.1 Vlastnosti inverzní Laplaceovy transformace

Jako jednu ze základních vlastností Laplaceovy transformace jsme si uvedli linearitu, stejně tomu bude také u inverzní Laplaceovy transformace.

Věta 1.13. *Pro inverzní Laplaceovu transformaci platí*

$$\mathscr{L}^{-1}(aF_1(s) + bF_2(s)) = a\mathscr{L}^{-1}(F_1(s)) + b\mathscr{L}^{-1}(F_2(s)).$$

Důkaz. Již víme, že Laplaceova transformace je lineární, tedy

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left(af_1(t) + bf_2(t)\right) &= a\mathscr{L}\left(f_1(t)\right) + b\mathscr{L}\left(f_2(t)\right)\\ &= aF_1(s) + bF_2(s).\end{aligned}$$

Nyní na tuto rovnost aplikujeme inverzní Laplaceovu transformaci

$$\left(af_1(t) + bf_2(t)\right) = \mathscr{L}^{-1}(aF_1(s) + bF_2(s)),$$

což je to stejné jako

$$a\mathscr{L}^{-1}(F_1(s)) + b\mathscr{L}^{-1}(F_2(s)) = \mathscr{L}^{-1}(aF_1(s) + bF_2(s)).$$

□

1.4.2 Tabulka vybraných inverzních Laplaceových transformací

$F(s)$	$f(t)$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
$\frac{1}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\sin\omega t$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
$\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$
$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega}t\sin\omega t$
$\frac{1}{(s-a)^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}e^{at}\sin\omega t$
$\frac{s}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}(\cos\omega t+\frac{a}{\omega}\sin\omega t)$
$\frac{1}{((s-a)^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3}e^{at}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$
$\frac{s}{((s-a)^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3}e^{at}(\omega^2 t\sin\omega t+a\sin\omega t-a\omega t\cos\omega t)$
$\frac{1}{s^2-\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\sinh\omega t$
$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$\cosh\omega t$

Tabulka 1.2: Tabulka vybraných inverzních Laplaceových transformací

1.5 Příklady

Příklad 1.2. Spočítejte Laplaceovu transformaci funkce $f(t)=3e^t+e^{-2t}-\sin 3t$.

Řešení.
Protože je Laplaceova transformace lineární, tedy platí (1.4), můžeme počítat

$$\mathscr{L}(f(t))=3\mathscr{L}(e^t)+\mathscr{L}(e^{-2t})-\mathscr{L}(\sin 3t).$$

Nyní podle tabulky 1.1 určíme jednotlivé Laplaceovy transformace

$$F(s)=\frac{3}{s-1}+\frac{1}{s+2}-\frac{3}{s^2+9}.$$

Příklad 1.3. Spočítejte inverzní Laplaceovu transformaci funkce $F(s) = \frac{4-2s}{s^3+4s}$.
Řešení.
Rozkladem na parciální zlomky zjistíme, že

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+4}.$$

Abychom inverzní Laplaceovy transformace mohli jednoduše vyčíst z tabulky 1.2, výraz si ještě trochu upravíme.

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4} - \frac{2}{s^2+4}.$$

Nyní už funkci $f(t)$ určíme snadno,

$$f(t) = 1 - \cos 2t - \sin 2t.$$

1.5.1 Příklady k procvičení

Spočítejte Laplaceovu transformaci funkcí

1. $f(t) = \mathrm{e}^{-3t}(\sin 2t + \cos 4t)$,

2. $f(t) = 5\mathrm{e}^{t}\left(1 + t^4 + \sin t\right)$.

Spočítejte inverzní Laplaceovu transformaci funkcí

3. $F(s) = \dfrac{s+3}{s^2-s-2}$,

4. $F(s) = \dfrac{s^2-3s+11}{(s-2)(s^2-4s+13)}$.

Výsledky

1. $F(s) = \dfrac{2}{(s+3)^2+4} + \dfrac{s+3}{(s+3)^2+16}$,

2. $F(s) = 5\left(\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{4!}{(s-1)^5} + \dfrac{1}{(s-1)^2+1}\right)$,

3. $f(t) = \dfrac{5}{3}\mathrm{e}^{2t} - \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}$,

4. $f(t) = \mathrm{e}^{2t}\left(1 + \dfrac{1}{3}\sin 3t\right)$.

1.6 Aplikace Laplaceovy transformace

Laplaceova transformace má využití například ve fyzice při měření signálů a frekvencí, v kvantové chemii pro popis pohybu částic po sférách a v dalších oborech. My se ale zaměříme na využití v matematice, a to konkrétně při řešení diferenciálních rovnic ve tvaru $ay''(t) + by'(t) + y(t) = f(t)$. Pro vyřešení diferenciální rovnice budeme postupovat ve třech krocích. Jako první budeme na obě strany rovnice aplikovat Laplaceovu transformaci. Už víme, že $f(t) = F(s)$, Laplaceovu transformaci $y(t)$ si označíme jako $\mathscr{L}(y(t)) = Y(s)$. V druhém kroku vyjádříme z již transformované rovnice $Y(s)$, na které následně ve třetím kroku aplikujeme inverzní Laplaceovu transformaci $\mathscr{L}^{-1}(Y(s)) = y(t)$, a tím získáme řešení rovnice. Ukážeme si nyní na příkladu.

Příklad 1.4. Řešte rovnici $y'' - y = t$, s podmínkami $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $\mathscr{L}(y) = Y$.

Řešení.
1. krok:
Místo f máme nyní y, tedy budeme počítat $\mathscr{L}(y)$. Z věty 1.5 o Laplaceově transformaci derivace víme, že

$$\mathscr{L}(y'') = s^2\mathscr{L}(y) - s \cdot y(0) - y'(0).$$

Po dosazení podmínek dostaneme

$$s^2 Y - s - 1.$$

Z tabulky 1.1 vybraných Laplaceových transformací funkcí také víme (nebo si jednoduše spočítáme), že

$$\mathscr{L}(t) = \frac{1}{s^2}.$$

Když tohle všechno dáme dohromady, dostaneme rovnici

$$s^2 Y - s - 1 - Y = \frac{1}{s^2}.$$

2. krok:
V druhém kroku vyjádříme z předchozí rovnice Y.

$$\begin{aligned} Y(s^2 - 1) &= \frac{1}{s^2} + s + 1, \\ Y &= \frac{1}{s^2(s^2-1)} + \frac{s}{s^2-1} + \frac{1}{s^2-1} \\ &= \frac{1 + s^3 + s^2}{s^2(s^2-1)} \\ &= \frac{1}{s^2(s^2-1)} + \frac{1}{s-1}. \end{aligned}$$

Pomocí rozkladu na parciální zlomky dostaneme

$$Y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right) - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1}.$$

3. krok:
Najdeme $\mathscr{L}^{-1}(Y) = y$, potom y je řešením úlohy, tedy

$$\begin{aligned} y &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right) - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1}\right] \\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}) - t + \mathrm{e}^t \\ &= \sinh t - t + \mathrm{e}^t. \end{aligned}$$

Příklad 1.5. Řešte rovnici $y'' + 2y' = t\sin t$, s podmínkami $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $\mathscr{L}(y) = Y$.

Řešení.
Nejdříve aplikujeme na zadanou diferenciální rovnici Laplaceovu transformaci. Pro levou stranu použijeme, stejně jako v předchozím příkladu, vzorec z věty 1.5. Na pravou stranu aplikujeme vzorec z tabulky 1.1 a dostaneme

$$s^2 Y + 2sY = \frac{2s}{(s^2+1)^2}.$$

Následně z rovnice vyjádříme Y,

$$Y = \frac{2}{(s^2+1)^2(s+2)}$$

a upravíme pomocí rozkladu na parciální zlomky. Dále Y upravíme tak, abychom lépe viděli možné inverzní Laplaceovy transformace.

$$\begin{aligned} Y &= -\frac{2(s-2)}{25(s^2+1)} - \frac{2(s-2)}{5(s^2+1)^2} + \frac{2}{25(s+2)} \\ &= \frac{1}{25}\left[-2\left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1}\right) - 10\left(\frac{s}{(s^2+1)^2} - 2\frac{1}{(s^2+1)^2}\right) + 2\frac{1}{s+2}\right]. \end{aligned}$$

Nyní na Y aplikujeme inverzní Laplaceovu transformaci, na pomoc si vezmeme tabulku 1.2.

$$y = \frac{1}{25}\left[-2(\cos t - 2\sin t) - 10\left(\frac{1}{2}t\sin t - (\sin t - t\cos t)\right) + 2\mathrm{e}^{-2t}\right].$$

Po úpravě obdržíme výsledek jako

$$y = \frac{1}{25}\left[-2\cos t + 14\sin t - 5t\sin t - 10t\cos t + 2\mathrm{e}^{-2t}\right].$$

1.6.1 Příklady k procvičení

Vyřešte diferenciální rovnice s počátečními podmínkami

1. $y'' + 3y' + 2y = 6\mathrm{e}^t, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 2,$
2. $y'' + 2y' + 2y = e^{-t}, \qquad y(0) = 2, y'(0) = 1,$
3. $y'' + 4y' + 8y = 0, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1,$
4. $y'' + y' = 2t - 3, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Výsledky

1. $y(t) = \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-2t} + e^{-t},$
2. $y(t) = \mathrm{e}^{-t}(\cos t + 3\sin t + 1),$
3. $y(t) = \frac{1}{2} \cdot \sin 2t \cdot \mathrm{e}^{-2t},$
4. $y(t) = t(t-5) - 6(\mathrm{e}^{-t} - 1).$

Kapitola 2

Konvoluce

V této kapitole si nejdříve ukážeme, co konvoluce vlastně je a jaké má vlastnosti. Dále zmíníme dekonvoluci a její využití v praxi, a to konkrétně v optice. Tímto se ale budeme zabývat pouze okrajově. Bude následovat několik příkladů.

2.1 Základní definice

Konvoluce je velmi užitečná matematická operace, hlavně pro násobení transformací. Ukažme si to například na Laplaceově transformaci, která nám je z předchozí kapitoly již dobře známá. Pokud se jedná o sčítání transformací, platí jednoduché pravidlo $\mathscr{L}(f+g) = \mathscr{L}(f) + \mathscr{L}(g)$. Jestli se nám ale jedná o násobení transformací, zde **neplatí**, že $\mathscr{L}(fg) = \mathscr{L}(f)\mathscr{L}(g)$. Abychom zjistili, co dát na levou stranu rovnice místo výrazu $\mathscr{L}(fg)$, budeme k tomu potřebovat konvoluci. Podklady k této kapitole jsou [2], [5], [6], [10], [12].

Definice 6. Mějme funkce $f(t)$ a $g(t)$. Jejich **konvoluci** zapisujeme jako $f * g$ a definujeme

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{2.1}$$

Abychom mohli mluvit o konvoluci, musí na pravé straně pro funkce f a g existovat integrál. Tímto je splněna nutná podmínka pro existenci konvoluce. Pokud jsou funkce f a g po částech spojité na intervalu $[0, t]$, je splněna postačující podmínka.

Poznámka. Obecně je konvoluce definována jako

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

což také můžeme najít ve většině publikací. My ale použijeme verzi z [6], která je uvedená v definici 6, protože všechny funkce, které v této práci uvažujeme splňují na intervalu $[0, t]$ podmínky pro existenci konvoluce. Někdy se také před integrálem může objevit konstanta, která určuje váhu konvoluce. To si ukážeme později.

2.2 Vlastnosti konvoluce

Značení konvoluce může připomínat označení součinu. Není to náhoda, protože konvoluce má podobné vlastnosti jako součin, zejména jsou v platnosti následující vlastnosti.

Věta 2.1. *Nechť f a g jsou funkce, které splňují nutnou a postačující podmínku pro existenci konvoluce. Pak platí následující vlastnosti.*

1. *Komutativita*
$$(f * g)(t) = (g * f)(t).$$

2. *Asociativita*
$$\big(f * (g * h)\big)(t) = \big((f * g) * h\big)(t).$$

3. *Distributivita*
$$\big(f * (g + h)\big)(t) = (f * g)(t) + (f * h)(t).$$

4. *Existence jednotky*
$$(f * \delta)(t) = (\delta * f)(t) = f(t),$$
kde δ je Diracova delta funkce, kterou definujeme jako funkci, pro kterou platí
$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$$
a
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

5. *Asociativita při násobení skalárem*
$$a(f * g)(t) = \big((af) * g\big)(t) = \big(f * (ag)\big)(t), \qquad a \in \mathbb{C}.$$

Abychom dokázali některé vlastnosti z předchozí věty, bude třeba znát Fubiniho větu, kterou si ukážeme. Její důkaz ale nebudeme uvádět.

Věta 2.2 (Fubiniho)**.** *Pro vícerozměrný interval $M = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ a spojitou funkci $f(x_1, \ldots, x_n)$ na množině M je násobný Riemannův integrál*
$$\int_M f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$
nezávislý na pořadí, ve kterém postupně integraci provádíme.

Následuje důkaz věty 2.1.

Důkaz. Nyní si dokážeme pouze vlastnosti 1, 2, 3, ostatní se dokáží analogicky použitím definice konvoluce a znalostí o integrování.

1. U tohoto důkazu použijeme substituci $t - \tau = t'$.

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t f(t-t') g(t')\,\mathrm{d}t' \\ &= (g * f)(t)\end{aligned}$$

2. V tomto případě využijeme již zmiňovanou Fubiniho větu.

$$\begin{aligned}\big((f * g) * h\big)(t) &= \int_0^t (f * g)(\tau) h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \left[\int_0^t (f)(\omega) g(\tau-\omega)\,\mathrm{d}\omega\right] h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \int_0^t f(\omega) g(\tau-\omega) h(t-\tau)\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t f(\omega) \left[\int_0^t g(\tau-\omega) h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] \mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

Nyní si upravíme pouze vnitřní integrál a použijeme substituci $\tau = \tau + \omega$.

$$\begin{aligned}\int_0^t g(\tau-\omega) h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau &= \int_0^t g(\tau+\omega-\omega) h\left(t-(\tau+\omega)\right)\,\mathrm{d}\tau \\ &= (g * h)(t-\omega)\end{aligned}$$

Teď už jen budeme pokračovat tam, kde jsme předtím skončili.

$$\int_0^t f(\omega)(g * h)(t-\omega)\,\mathrm{d}\omega = \big(f * (g * h)\big)(\omega)$$

3.

$$\begin{aligned}\big(f * (g+h)\big)(t) &= \int_0^t f(\tau)(g+h)(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t f(\tau)\left[g(t-\tau) + h(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \left[f(\tau) g(t-\tau) + f(\tau) h(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t f(\tau) h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= (f * g)(t) + (f * h)(t)\end{aligned}$$

□

2.2.1 Konvoluční teorém

Konvoluční teorém je jedna z nejdůležitějších vlastností konvoluce. Protože známe zatím jen Laplaceovu transformaci, použijeme v konvolučním teorému ji. Později ale ukážeme vztah konvoluce i s Fourierovou transformací.

Věta 2.3. *Nechť* $\mathscr{L}\left(f(t)\right) = F(s)$ *a* $\mathscr{L}\left(g(t)\right) = G(s)$. *Potom*

$$\mathscr{L}\left(f(t) * g(t)\right) = \mathscr{L}\left(f(t)\right) \cdot \mathscr{L}\left(g(t)\right) = F(s) \cdot G(s).$$

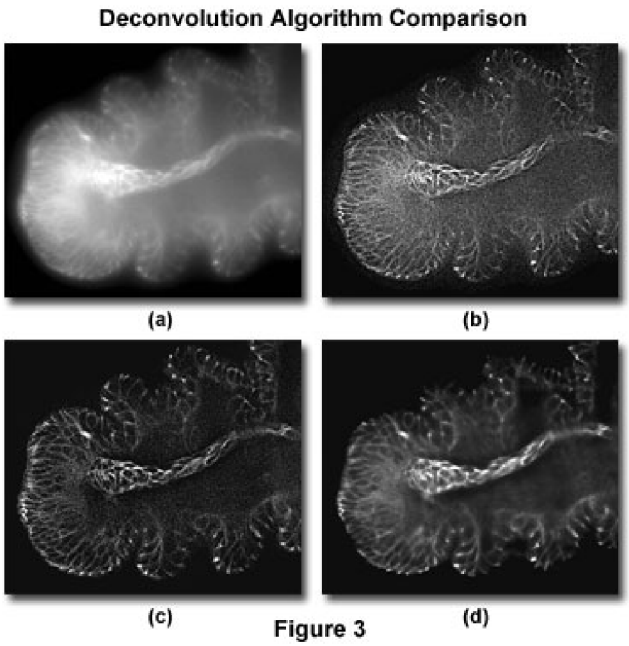
Pro inverzní Laplaceovu transformaci platí

$$\mathscr{L}^{-1}\left(F(s) \cdot G(s)\right) = f(t) * g(t).$$

Důkaz. Důkaz najdete v [6]. □

2.3 Dekonvoluce

Dekonvoluce je inverzní operace ke konvoluci. Jestliže jsme při konvoluci měli funkci f, kterou jsme považovali za originální signál a funkci g, která způsobovala rozmazání, šum, nebo podobnou změnu funkce f, dekonvolucí se snažíme najít onu originální funkci f. Tato metoda se používá například pro zlepšení kontrastu a rozlišení digitálních snímků pořízených mikroskopem a další technikou. Snaží se odstranit nebo zvrátit rozmazání obrazu. Pro úpravu obrazu existuje několik algoritmů, my si zde na obrázku 2.1 ukážeme, jak taková dekonvoluce v praxi vypadá. Na části a) obrázku 2.1 vidíme původní obraz, pořízený mikroskopem. Na pozici b) je použit algoritmus nejbližšího souseda, c) nám ukazuje Wienerovu filtraci a d) slepou iterační dekonvoluci. Více o dekonvoluci a těchto algoritmech se můžete dozvědět např. v [15], odkud jsme také převzali obrázek 2.1. Další informace lze najít také v [14].



Obrázek 2.1: Dekonvoluce

2.4 Příklady

Příklad 2.1. Určete konvoluci $\cos t * \sin t$.

Řešení.
Z definice konvoluce (2.1) víme, že

$$\cos t * \sin t = \int_0^t \cos(\tau)\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Nyní budeme potřebovat znalost vzorce pro počítání s goniometrickými funkcemi

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\left(\sin(A+B) + \sin(A-B)\right).$$

V našem případě je $A = t - \tau$ a $B = \tau$. Potom

$$\begin{aligned}
\int_0^t \cos(\tau)\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau &= \int_0^t \frac{1}{2}\big(\sin(t) + \sin(t-2\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin(t)\big[\tau\big]_0^t + \frac{1}{2}\big[\cos(t-2\tau)\big]_0^t\right) \\
&= \frac{1}{2}t\sin(t) + \frac{1}{4}\big(\cos(-t) - \cos(t)\big) \\
&= \frac{1}{2}t\sin(t).
\end{aligned}$$

2.4.1 Příklady k procvičení

Určete konvoluci funkcí

1. $f(t) = t$, $g(t) = \mathrm{e}^{at}$,
2. $f(t) = \mathrm{e}^{-2t}$, $g(t) = \sin t$,
3. $f(t) = \mathrm{e}^{t} + 1$, $g(t) = \mathrm{e}^{2t}$,
4. $f(t) = t + 3$, $g(t) = \sin t$.

Výsledky

1. $\frac{1}{a^2}\left(\mathrm{e}^{at} - at - 1\right)$,
2. $\frac{1}{5}\left(\mathrm{e}^{-2t} + 2\sin t - \cos t\right)$,
3. $\frac{3}{2}\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{t} - \frac{1}{2}$,
4. $t - \sin t - 3\cos t + 3$.

Kapitola 3

Fourierovy řady

3.1 Fourierova řada vzhledem k obecné posloupnosti

Při úvahách o aproximaci trigonometrickými řadami hraje velkou roli ortogonalita trigonometrického systému. To ukážeme nejprve na obecném systému funkcí $\{\varphi_n(x)\}$ a poté aplikujeme na trigonometrický systém. Zadefinujeme skalární součin funkcí, protože je pro ortogonalitu zásadní. Zmíníme také komplexní Fourierovu řadu. Definice a věty jsou čerpány z [4], [6] a [13].

Definice 7. Buď $f(x)$ a $g(x)$ funkce integrovatelné na intervalu $[a,b]$. Číslo

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

nazveme **skalárním součinem** funkcí f,g. Funkce f a g jsou **ortogonální** na intervalu $[a,b]$, právě když platí, že $\langle f,g\rangle = 0$.

Věta 3.1. *Pro skalární součin $\langle f,g\rangle$ platí*

i) $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$,

ii) $\langle c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n, g\rangle = c_1\langle f_1,g\rangle + \cdots + c_n\langle f_n,g\rangle, \quad c_i \in \mathbb{R}$,

iii) $\langle f,f\rangle \geq 0$.

Důkaz. Vlastnosti dokážeme použitím definice 7.

i)

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \langle g,f\rangle$$

ii)

$$\begin{aligned}\langle c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n, g\rangle &= \int_a^b (c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x))g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= c_1\int_a^b f_1(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + c_n\int_a^b f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= c_1\langle f_1,g\rangle + \cdots + c_n\langle f_n,g\rangle\end{aligned}$$

iii)

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

□

Definice 8. Buď f integrovatelná funkce na intervalu $[a,b]$. **Normou funkce** f rozumíme číslo $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. Funkce f se nazývá normovaná, právě když $\|f\| = 1$.

Nyní už známe skalární součin, pojem ortogonality funkce a normy funkce, můžeme se tedy zaměřit na ortogonalitu posloupnosti $\{\varphi_n(x)\}$.

Definice 9. Posloupnost $\{\varphi_n(x)\}$ je **ortogonální**, právě když každé dvě funkce φ_m, φ_n, $(m \neq n)$ jsou ortogonální a každá funkce φ_n má kladnou normu.
Posloupnost $\{\varphi_n(x)\}$ je **ortonormální**, právě když je ortogonální a každá funkce φ_n je normovaná, tedy

$$\langle \varphi_m, \varphi_n\rangle = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Definice 10. Buď $\{\varphi_n(x)\}$ ortogonální posloupnost funkcí na intervalu $[a,b]$, f je integrovatelná funkce na intervalu $[a,b]$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$$

nazveme **Fourierovou řadou** funkce f vzhledem k ortogonální posloupnosti $\{\varphi_n(x)\}$ a čísla c_n vyjádřená vzorcem

$$c_n = \frac{\langle f, \varphi_n\rangle}{\|\varphi_n\|^2}$$

nazveme **Fourierovými koeficienty** funkce f.

3.2 Fourierova řada vzhledem k trigonometrickému systému

V kapitole 1 jsme si definovali pojem periodická funkce. V této kapitole se budeme zabývat periodickými funkcemi s periodou $p = 2\pi$. Jsou to funkce

$$1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots, \tag{3.1}$$

kterým říkáme **trigonometrický systém**.

Definice 11. Nechť $a_0, a_1, \dots, b_1, \dots$ jsou reálné konstanty. Potom řadu funkcí

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots \tag{3.2}$$

nazveme **trigonometrickou řadou**, konstanty $a_0, a_1, \dots, b_1, \dots$ nazveme koeficienty této řady. Řadu můžeme také zapsat jako

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{3.3}$$

Nyní budeme teorii vybudovanou na obecné posloupnosti $\{\varphi_n(x)\}$ aplikovat na trigonometrický systém (3.1). Jako první ukážeme ortogonalitu tohoto systému.

Věta 3.2. *Posloupnost* $\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$ *je ortogonální na libovolném intervalu* $[c, c+2\pi]$ *délky* 2π.

Důkaz. Protože pro periodické funkce platí vztah

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

můžeme dokazovat ortogonalitu na intervalu $[-\pi, \pi]$. Tedy pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}
\langle 1, \cos nx \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x = 0, \\
\langle 1, \sin nx \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x = 0,
\end{aligned}$$

pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}
\langle \sin mx, \cos nx \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x + \sin(m+n)x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \big[-\cos(m-n)x - \cos(m+n)x \big]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2} \big[(1+1) - (1+1) \big] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$ je

$$\begin{aligned}
\langle \cos mx, \cos nx \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x + \cos(m+n)x\,\mathrm{d}x \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \sin mx, \sin nx\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x - \cos(m+n)x \,\mathrm{d}x \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

A nyní už slíbená Fourierova řada vzhledem ke trigonometrickému systému (3.1).

Definice 12. **Fourierova řada** libovolné integrovatelné funkce f na intervalu $[-\pi,\pi]$ má vzhledem k trigonometrickému systému (3.1) tvar

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{3.4}$$

kde a_n, b_n jsou **Fourierovy koeficienty** funkce f, pro něž platí

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{N}, \\ a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Nyní si ukážeme, že existují také sinové a kosinové Fourierovy řady. Připomeneme si, co platí pro sudé a liché funkce, detaily a důkazy můžeme nalézt v [3].

Věta 3.3. *Nechť pro každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$. Funkce $f(x)$ je sudá, pokud $f(-x) = f(x)$, a lichá, pokud $f(-x) = -f(x)$. Tedy funkce $\cos nx$ je sudá a funkce $\sin nx$ je lichá.*

Věta 3.4. *Buď f integrovatelná funkce na intervalu $[-\pi,\pi]$. Je-li f sudá funkce, pak má její Fourierova řada tvar*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

kde

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N} \cup 0.$$

Je-li f lichá, má její Fourierova řada tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,,$$

kde

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Poznámka. Fourierovu řadu můžeme také najít ve tvaru pro obecný interval $I = [a, a+T]$, $T > 0$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, jako

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x),$$

kde Fourierovy koeficienty jsou ve tvaru

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\cos n\omega x \,\mathrm{d}x, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\sin n\omega x \,\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{N}, \\ a_0 &= \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

3.2.1 Komplexní Fourierova řada

Fourierovu řadu můžeme napsat také v komplexním tvaru, což nás navede na spojitost Fourierových řad s Fourierovou transformací, kterou se budeme zabývat v následující kapitole. Abychom převedli trigonometrický tvar na komplexní, využijeme znalosti Eulerova vzorce.

Exponenciální funkci imaginárního argumentu lze vyjádřit tzv. Eulerovým vzorcem

$$\mathrm{e}^{inx} = \cos nx + i \sin nx.$$

Jednoduchým odvozením z Eulerova vzorce dostaneme následující vztahy

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-inx} &= \cos nx - i \sin nx, \\ \cos nx &= \frac{\mathrm{e}^{inx} + \mathrm{e}^{-inx}}{2}, \\ \sin nx &= \frac{\mathrm{e}^{inx} - \mathrm{e}^{-inx}}{2i}. \end{aligned}$$

Jestliže tyto rovnosti dosadíme do vzorce (3.4) pro Fourierovu řadu, dostaneme Fourierovu řadu v komplexním tvaru

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{inx},$$

kde

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - i b_n), \\ c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + i b_n), \\ c_0 &= \frac{1}{2} a_0. \end{aligned}$$

Tyto komplexní Fourierovy koeficienty můžeme použitím rovnosti pro a_n a b_n vyjádřit ve tvaru integrálu

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{e}^{-inx} \, \mathrm{d}x,$$
$$c_{-n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{e}^{inx} \, \mathrm{d}x.$$

Vzhledem k délce a náročnosti diskuze o konvergenci Fourierových řad odkážeme čtenáře na [4].

3.3 Příklady

Nyní si ukážeme jeden řešený příklad, potom bude mít čtenář prostor na procvičení neřešených příkladů. Pro řešení budeme využívat vlastností o integrování sudých a lichých funkcí, proto si připomeneme následující větu.

Věta 3.5. *Nechť je funkce integrovatelná na intervalu* $[-a, a]$. *Je-li* $f(x)$ *na tomto intervalu sudá, pak*

$$\int_{-a}^{a} f(x) \, \mathrm{d}x = 2 \int_{0}^{a} f(x) \, \mathrm{d}x,$$

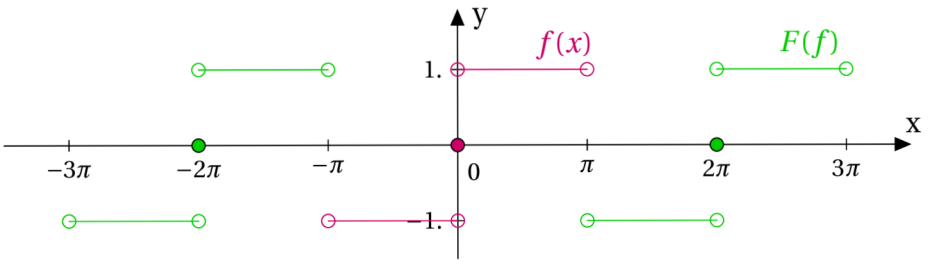
je-li $f(x)$ *lichá, pak*

$$\int_{-a}^{a} f(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Příklad 3.1. Najděte Fourierovu řadu funkce, která je periodickým rozšířením funkce $f(x)$ na intervalu I,

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x), \quad I = [-\pi, \pi].$$

Řešení.



Obrázek 3.1: Graf funkce $\operatorname{sgn}(x)$ a jejího periodického rozšíření

Na obrázku 3.1 můžeme vidět zadanou funkci a její periodické rozšíření. Podle definice 12 nejprve spočítáme Fourierovy koeficienty pro tuto funkci a interval. Víme, že funkce $\operatorname{sgn}(x)$ a $\sin x$ jsou liché, funkce $\cos x$ je sudá. Proto počítejme

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\cdot 0 = 0,\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0,\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}(-\cos n\pi + 1)\\
&= \frac{2}{n\pi}\left((-1)^{n+1}+1\right)\\
&= \begin{cases} 0, & n = 2k\\ \frac{4}{n\pi}, & n = 2k+1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Nyní tyto Fourierovy koeficienty dosadíme do vzorce pro Fourierovu řadu a upravíme pro $n = 2k+1$.

$$F\big(f(x)\big) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\sin nx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)}\sin[(2k+1)x].$$

3.3.1 Příklady k procvičení

Nalezněte Fourierův rozvoj funkcí na intervalech

1. $f(x) = x^2$, $I = [-\pi,\pi]$,
2. $f(x) = x$, $I = [-1,1]$,
3. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0,\\ 1, & 0 \le x < \pi, \end{cases}$
4. $f(x) = |x|$, $I = [-1,1]$.

Výsledky

1. $F(f) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,$
2. $F(f) = \dfrac{2}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\sin nx,$
3. $F(f) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)x,$
4. $F(f) = \dfrac{1}{2} - 4\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2\pi^2}\cos(2k-1)\pi x.$

Kapitola 4

Fourierova transformace

Další transformací, kterou se budeme zabývat, je Fourierova transformace. V předchozí kapitole jsme zavedli pojem Fourierovy řady, která periodické funkce popisovala jako goniometrické funkce s frekvencí ω. Abychom ale mohli popisovat funkce, které nejsou periodické, rozšíříme periodu T do nekonečna, čímž docílíme periodicity těchto funkcí. Tím se lehce dostaneme od Fourierovy řady k Fourierově transformaci. V této kapitole si nejprve Fourierovu transformaci i její inverzní podobu zadefinujeme, pak se podíváme na jejich základní vlastnosti a nakonec je budeme aplikovat na řešení diferenciálních rovnic. Teorii k této kapitole jsme čerpali z [1], [2], [6], [8], [10], [13].

4.1 Základní definice

Jedním z předpokladů pro existenci Fourierovy transformace je, že funkce je absolutně integrovatelná. Pojďme si ukázat, co to znamená.

Poznámka. Funkce $f(x)$ je absolutně integrovatelná na intervalu I, jestliže má na I primitivní funkci a platí $\int_I |f(x)| < \infty$.

Definice 13. Nechť funkce $f(x)$ je absolutně integrovatelná a po částech spojitá na každém konečném intervalu. Pak

$$\mathscr{F}\left(f(x)\right) = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-ix\omega} \,\mathrm{d}x \tag{4.1}$$

nazýváme **Fourierovou transformací** funkce $f(x)$. Potom také můžeme ukázat, že

$$\mathscr{F}^{-1}\left(F(\omega)\right) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \mathrm{e}^{ix\omega} \,\mathrm{d}\omega. \tag{4.2}$$

Tento vztah nazveme **inverzní** nebo zpětnou **Fourierovou transformací**.

Poznámka. Dvojici Fourierovy transformace a její inverze můžeme najít ve třech podobách. Jsou to

1.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-i2\pi x\omega} \,\mathrm{d}x,$$
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \mathrm{e}^{i2\pi x\omega} \,\mathrm{d}\omega.$$

2.
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ix\omega}\,\mathrm{d}x,$$
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{ix\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

3.
$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ix\omega}\,\mathrm{d}x,$$
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{ix\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

Všechny tyto systémy se běžné používají, je tedy na nás, který se rozhodneme použít. V prvním případě je faktor 2π zahrnut v exponentu. V druhém případě se 2π dostalo před integrál inverzní Fourierovy transformace, kde ovšem schází symetrie, které je naopak docíleno ve třetím případě.

4.2 Základní vlastnosti Fourierovy transformace

Věta 4.1. *Nechť $\mathscr{F}[f(x)] = F(\omega)$, tedy pro $f(x)$ existuje její Fourierova transformace. Potom má tato transformace následující vlastnosti.*

1. *Transformace posunutí*
$$\mathscr{F}\left(f(x-a)\right) = \mathrm{e}^{-i\omega a}\mathscr{F}\left(f(x)\right).$$

2. *Posunutí transformace*
$$\mathscr{F}\left(\mathrm{e}^{ixa}f(x)\right) = F(\omega - a).$$

3. *Změna měřítka*
$$\mathscr{F}\left(f(ax)\right) = \frac{1}{|a|}\mathscr{F}\left(f(x)\right).$$

4. *Dualita*
$$\mathscr{F}\left(f(x)\right) = F(-\omega).$$

Důkaz. Tyto vlastnosti jednoduše dokážeme se znalostí základní definice Fourierovy transformace (4.1).

1. K tomuto důkazu použijeme substituci $x - a = t$.
$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left(f(x-a)\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)\mathrm{e}^{-ix\omega}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-i\omega(t+a)}\,\mathrm{d}t\\ &= \mathrm{e}^{-i\omega a}\mathscr{F}\left(f(x)\right).\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left(\mathrm{e}^{ixa}f(x)\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{ixa}f(x)\mathrm{e}^{-ix\omega}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-ix(\omega-a)}\,\mathrm{d}x\\ &= F(\omega-a).\end{aligned}$$

3. Použitím substituce $ax = y$ a tedy i $\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{d}y$ získáme
$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left(f(ax)\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(ax)\mathrm{e}^{-iax\omega}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a}f(y)\mathrm{e}^{-iy\omega}\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

   Pokud $a > 0$, potom
$$\mathscr{F}\left(f(ax)\right) = \frac{1}{a}F(\omega) = \frac{1}{|a|}F(\omega).$$

   Pokud $a < 0$, při substituci se přetočí meze, tedy
$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left(f(ax)\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{-\infty}\frac{1}{a}f(y)\mathrm{e}^{-iy\omega}\,\mathrm{d}y\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a}f(y)\mathrm{e}^{-iy\omega}\,\mathrm{d}y\\ &= -\frac{1}{a}F(\omega) = \frac{1}{|a|}F(\omega).\end{aligned}$$

   Potom
$$\mathscr{F}\left(f(ax)\right) = \frac{1}{|a|}F(\omega),$$

   což jsme chtěli dokázat.

4. V tomto důkaze budeme používat známý vzorec pro inverzní Fourierovu transformaci (4.2). Nejprve zaměníme x za $-\omega$ a dostaneme
$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\mathrm{e}^{ix\omega}\,\mathrm{d}x.$$

   V dalším kroku změníme ω na $-\omega$ a dostaneme již známý vzorec pro Fourierovu transformaci
$$f(-\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\mathrm{e}^{-ix\omega}\,\mathrm{d}x = \mathscr{F}\left(F(x)\right).$$

□

4.2.1 Linearita

Stejně jako Laplaceova transformace, i Fourierova má vlastnost linearity.

Věta 4.2. *Nechť* $\mathscr{F}\left(f(x)\right) = F(\omega)$ *a* $\mathscr{F}\left(g(x)\right) = G(\omega)$*, a, b jsou libovolné konstanty. Potom*

$$\mathscr{F}\left(af(x) + bg(x)\right) = a\mathscr{F}\left(f(x)\right) + b\mathscr{F}\left(g(x)\right).$$

Důkaz. Protože je integrování lineární operací, můžeme počítat.

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left(af(x) + bg(x)\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(af(x) + bg(x)\right)\mathrm{e}^{-ix\omega}\,\mathrm{d}x \\ &= a\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ix\omega}\,\mathrm{d}x + b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ix\omega}\,\mathrm{d}x \\ &= a\mathscr{F}\left(f(x)\right) + b\mathscr{F}\left(g(x)\right).\end{aligned}$$

□

4.2.2 Fourierova transformace a derivace

Jednou ze základních vlastností Fourierovy transformace je převádění derivace na násobení. O tom pojednává následující věta.

Věta 4.3 (Transformace derivace)**.** *Nechť* $f(x)$ *je spojitě diferencovatelná,* $f(x) \to 0$ *pro* $|x| \to 0$ *a* $f'(x)$ *je absolutně integrovatelná, potom*

$$\mathscr{F}\left(f'(x)\right) = i\omega\mathscr{F}\left(f(x)\right) = i\omega F(\omega).$$

Důkaz. Z definice víme, že $\mathscr{F}\left(f'(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-ix\omega}\,\mathrm{d}x$, což budeme integrovat pomocí metody per partes

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left(f'(x)\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-ix\omega}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{cc} u' = f' & v = \mathrm{e}^{-i\omega x} \\ u = f & v' = -i\omega^{-i\omega x}\end{array}\right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f(x)\mathrm{e}^{-i\omega x}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i\omega x} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= i\omega F(\omega).\end{aligned}$$

□

Ukážeme si, co se bude dít, budeme-li naopak derivovat Fourierovu transformaci.

Věta 4.4 (Derivace transformace)**.** *Nechť* $f(x)$ *a* $g(x)$ *jsou absolutně integrovatelné, přičemž* $g(x) = xf(x)$*. Pak Fourierova transformace je diferencovatelná a platí*

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{F}}{\mathrm{d}\omega} = -i\mathscr{G}(\omega).$$

Důkaz. Derivováním vztahu

$$\mathscr{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-i\omega x} \, \mathrm{d}x$$

podle ω dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathscr{F}}{\mathrm{d}\omega} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)\mathrm{e}^{-i\omega x} \, \mathrm{d}x \\
&= -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\big(f(x)x\big)}_{g(x)} \mathrm{e}^{-i\omega x} \, \mathrm{d}x \\
&= -i\mathscr{F}\big(g(x)\big) \\
&= -i\mathscr{G}(x).
\end{aligned}$$

□

4.2.3 Fourierova transformace konvoluce

V kapitole 2 jsme si zavedli pojem konvoluce, nyní si ukážeme konvoluci pro Fourierovu transformaci.

Poznámka. Zde ukážeme slíbenou konvoluci s konstantou před integrálem

$$f(x) * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x f(\tau) g(x-\tau) \, \mathrm{d}\tau.$$

Díky této konstantě dosáhneme rovnosti v následující větě.

Věta 4.5 (Fourierova transformace konvoluce)**.** *Označme* $\mathscr{F}\big(f(x)\big) = \mathscr{F}(\omega)$ *a* $\mathscr{F}\big(g(x)\big) = \mathscr{G}(\omega)$, *potom*

$$\mathscr{F}\big(f(x) * g(x)\big) = \mathscr{F}(\omega)\mathscr{G}(\omega).$$

K důkazu předchozí věty použijeme znalost Fubiniho věty 2.2, kterou jsme si uvedli již v kapitole 2.

Důkaz.

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(f * g)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_0^x f(\tau) g(x-\tau) \, \mathrm{d}\tau \Big) \mathrm{e}^{-i\omega x} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-i\omega x} f(\tau) g(x-\tau) \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-i\omega\tau} f(\tau) \mathrm{e}^{-i\omega(x-\tau)} g(x-\tau) \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-i\omega\tau} f(\tau) \, \mathrm{d}\tau \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega y} g(y) \, \mathrm{d}y \\
&= \mathscr{F}(\tau)\mathscr{G}(\tau).
\end{aligned}$$

□

4.2.4 Základní identita Fourierovy transformace

Věta 4.6. *Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou absolutně integrovatelné. Pak platí*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathscr{F}\big(g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}\big(f(x)\big)\,g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Opět použitím věty 2.2 dostaneme

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathscr{F}\big(g(x)\big)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\mathrm{e}^{-ixy}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int\int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y)\mathrm{e}^{-ixy}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ixy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\mathscr{F}\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

□

4.3 Příklady

Ukažme si příklady na výpočet Fourierovy transformace a inverzní Fourierovy transformace.

Příklad 4.1. Vypočítejte Fourierovu transformaci funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$, $a > 0$.

Řešení.
Funkci $f(x)$ dosadíme do vzorce pro Fourierovu transformaci (4.1) a počítáme integrál

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a|x|}\mathrm{e}^{-ix\omega}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{-ix\omega}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{-ix\omega}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(a+i\omega)x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(a-i\omega)x}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Nyní pro druhý integrál zavedeme substituci $u = -x$, tím se nám změní i meze

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(a+i\omega)x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(a-i\omega)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\mathrm{e}^{-(a+i\omega)x}}{-(a+i\omega)}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\mathrm{e}^{-(a-i\omega)x}}{-(a-i\omega)}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{a^2+\omega^2}.
\end{aligned}$$

Příklad 4.2. Vypočítejte inverzní Fourierovu transformaci funkce $F(\omega) = \frac{1}{a^2+\omega^2}$, $a > 0$.

Řešení.
Dosazením do vzorce pro inverzní Fourierovu transformaci (4.2) získáme

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix\omega}}{a^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega.$$

Z předchozího příkladu víme, že $\mathscr{F}\left(\mathrm{e}^{-a|x|}\right) = \dfrac{2a}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{1}{a^2+\omega^2}$. Jednoduchou úpravou a znalostí linearity Fourierovy transformace odvodíme, že

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\mathscr{F}\left(\mathrm{e}^{-a|x|}\right) = \mathscr{F}\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\mathrm{e}^{-a|x|}\right) = \frac{1}{a^2+\omega^2} = \mathscr{F}(f(x)).$$

Tedy

$$f(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\mathrm{e}^{-a|x|}.$$

4.3.1 Příklady k procvičení

Nalezněte Fourierovy transformace funkcí

1. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le L, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le L, \\ 0, & |x| > L. \end{cases}$

Nalezněte inverzní Fourierovy transformace funkcí

3. $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\omega}{\omega}$,

4. $F(\omega) = \dfrac{\mathrm{e}^{-i\omega}}{\omega^2+a^2}, \qquad a > 0.$

Výsledky

1. $F(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{1-\mathrm{e}^{-i\omega L}}{i\omega}\right)$,

2. $F(\omega) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin(L\omega)}{\omega}$,

3. $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ \frac{1}{2}, & |x| < 1, \end{cases}$

4. $f(x) = \sqrt{2\pi}\dfrac{\mathrm{e}^{-a|x-1|}}{2a}$.

4.4 Aplikace Fourierovy transformace

Podobně jako Laplaceova transformace je Fourierova transformace hojně využívaná hlavně ve fyzice, kde se používá při převodu signálů. V matematice se Fourierova transformace používá při řešení diferenciálních rovnic, a to si také ukážeme. V příkladech budeme postupovat obdobně jako při řešení diferenciálních rovnic pomocí Laplaceovy transformace. V prvním kroku tedy aplikujeme na obě strany rovnice Fourierovu transformaci (4.1), poté si vyjádříme $Y(\omega)$ a na tuto novou rovnici aplikujeme inverzní Fourierovu transformaci (4.2), čímž získáme $y(x)$, tedy řešení. Zadání následujícího příkladu jsme převzali z [5].
K vyřešení následujícího příkladu je potřeba znalost komplexní analýzy. Pokud čtenář s tímto oborem nemá zkušenosti, doporučujeme [7].

Příklad 4.1. Řešte rovnici $y' + y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$.

Řešení.
Nyní máme opět $y(x)$ místo $f(x)$. Vzorec o počítání Fourierovy transformace derivace známe z věty (4.3). Jak vypadá Fourierova transformace pravé strany rovnice spočítáme podle definice Fourierovy transformace (4.1). Po aplikaci Fourierovy transformace na rovnici tedy získáme

$$i\omega Y(\omega) + Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}.$$

V dalším kroku z této rovnice vyjádříme $Y(\omega)$.

$$Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(1+\omega^2)(1+i\omega)}.$$

Nyní už jen na tuto novou rovnici aplikujeme inverzní Fourierovu transformaci a dopočítáme

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(1+\omega^2)(1+i\omega)}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{ix\omega}}{(1+\omega^2)(1+i\omega)}\,\mathrm{d}\omega. \end{aligned}$$

Integrál budeme počítat pomocí teorie reziduí (viz [7]), první pro dvojnásobný pól $z = i$, potom pro pól $z = -i$ násobnosti 1, tj.

$$\begin{aligned} x > 0 \to \operatorname{Rez}_i\left[\frac{\mathrm{e}^{ixz}}{(1+z^2)(1+iz)}\right] &= \lim_{z\to i}\left((z-i)^2\frac{\mathrm{e}^{ixz}}{i(z-i)^2(z+i)}\right)' \\ &= \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{2i} + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{4i}, \end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi}2\pi i\left(\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{2i} + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{4i}\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{4}(2x+1), \end{aligned}$$

$$x<0 \to \operatorname{Rez}_{-i}\left[\frac{\mathrm{e}^{ixz}}{(1+z^2)(1+iz)}\right] = \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{\mathrm{e}^{ixz}}{i(z+i)(z-i)^2}$$
$$= -\frac{\mathrm{e}^{x}}{4i},$$

tedy

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi}(-2\pi i)\left(\frac{\mathrm{e}^{x}}{4i}\right)$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{x}}{4}.$$

Tím jsme dostali partikulární řešení rovnice

$$y_P(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{4}(2x+1), & x>0,\\ \frac{\mathrm{e}^{x}}{4}, & x<0.\end{cases}$$

Budeme potřebovat také řešení homogenní rovnice $y'+y=0$, což je

$$y_H(x) = c\mathrm{e}^{-x}$$

Dosazením do rovnice $y(x) = y_P(x) + y_H(x)$ dostaneme řešení diferenciální rovnice, tedy

$$y(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}+c\right), & x>0,\\ \mathrm{e}^{-x}\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}+c\right), & x\le 0.\end{cases}$$

4.4.1 Příklady k procvičení

Řešte diferenciální rovnice

1. $-u''+u=f(x)$,
2. $u''-xu=0$,
3. $au'+bu=E(x)$, kde $E(x)=E_0\mathrm{e}^{-c|x|}$,
4. $u'+au=f(x)$.

Výsledky

1. $u(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-|x-\tau|}\,\mathrm{d}\tau$,
2. $u(x)=\dfrac{C}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\omega^3}{3}+\omega x\right)}\,\mathrm{d}\omega$, pro $C=1$, $u(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Ai}(x)$,
3. $u(x)=\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}x}$,
4. $u(x)=e^{-ax}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{a\tau}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

Závěr

Cílem této práce bylo zpracovat teorii o integrálních transformacích, především o Laplaceově a Fourierově transformaci, jejich vlastnostech a využití. Tato teorie byla doplněna jak o řešené i neřešené příklady k jednotlivým částem, tak i o praktickou aplikaci těchto transformací na řešení diferenciálních rovnic.

Seznam použité literatury

[1] BLEECKER, David a George CSORDAS. *Basic Partial Differential Equations*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1992. ISBN 978-146-8414-363.

[2] DEBNATH, Lokenath. *Integral Transforms and Their Applications*. Boca Raton (Florida): CRC Press, 1995. ISBN 0-8493-9458-9.

[3] DOŠLÁ, Zuzana a Jaromír KUBEN. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. 2. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2012. ISBN 978-80-210-5814-9.

[4] DOŠLÁ, Zuzana a Vítězslav NOVÁK. *Nekonečné řady*. 3. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2013. ISBN 978-80-210-6416-4.

[5] DUFFY, Dean G. *Green's functions with applications*. Boca Raton, Fla.: Chapman & Hall/CRC, 2001. Studies in advanced mathematics. ISBN 15-848-8110-0.

[6] DYKE, Philip P.G. *An introduction to Laplace transforms and Fourier series*. 3rd printing. London (Great Britain): Springer-Verlag London Limited, 2004. ISBN 1-85233-015-5.

[7] KALAS, Josef. *Analýza v komplexním oboru*. Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2006. ISBN 80-210-4045-9.

[8] KOLÁŘ, Martin. *Spektrální analýza 1* [online].[cit. 2016-04-08]. Dostupné z: `http://www.math.muni.cz/~zelinka/dokumenty/fa2.pdf`.

[9] KOUKAL, Stanislav. *Laplaceova transformace*. 1.vydání. Brno: Ediční středisko VUT Brno, 1979. SYSNO 000557986.

[10] KREYSZIG, Erwin. *Advanced Engineering Mathematics*. 10th Edition. Hoboken (New Jersey): John Wiley & Sons, Inc., 1999. ISBN 978-0-470-45836-5.

[11] LAMPART, Marek a Tomáš KOZUBEK. *Integrální transformace* [online].[cit. 2016-05-07]. Dostupné z: `http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/laplace1_krok.pdf`

[12] ROBERTS, Michael J. *Web Appendix D – Derivations of Convolution Properties* [online].[cit. 2016-05-07]. Dostupné z: `http://web.eecs.utk.edu/~roberts/WebAppendices/ /DConvProperties.pdf`.

[13] SLOVÁK, Jan, Martin PANÁK a Michal BULANT. *Matematika drsně a svižně*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2013. ISBN 978-80-210-6307-5.

[14] SMITH, Steven W. *The scientist and engineer's guide to digital signal processing: Chapter 17-Custom Filters*. 2nd ed. San Diego, California: California Technical Pub, 1999. ISBN 09-660-1767-6.

[15] WALLACE, Wes, Lutz H. SCHAEFER, Jason R. SWEDLOW, David BIGGS. Algorithms for Deconvolution Microscopy. *Microscopy Resource Center* [online]. [cit. 2016-05-02]. Dostupné z: `http://www.olympusmicro.com/primer/digitalimaging/deconvolution/ /deconalgorithms.html`.