

## Elementární matematické metody ve financích

Cílem této bakalářské práce je zpracovat témata z finanční matematiky, která nejsou obsahem standardních kurzů, přičemž se má vycházet zejména z knížky A. Černého - Mathematical Techniques in Finance. Jako čtenář je určen student matematiky s minimálními znalostmi ekonomie.

Samotné tělo práce má 26 stran, skládá se z 4 kapitol a mimo již zmíněného zdroje využívá 10 dalších, celkem je z nich 5 anglických.

První kapitola srozumitelně zavádí použité ekonomické pojmy, zejména cenné papíry a typy trhů. Jak teoreticky, tak na příkladu, je zde ukázáno, jak lze cílové aktivum zajistit pomocí portfolia základních aktiv.

Druhá kapitola rozebírá možnosti přesného nebo nejlepšího přibližného zajištění cílových aktiv dle typu trhu. Teoreticky je podepřena tvrzeními lineární algebry o přibližných nebo přesných řešeních soustav lineárních rovnic, USV či QR rozkladech matic a hledáním pseudoinverze.

Třetí kapitola se zabývá určením ceny zajišťovaného aktiva. Je definován pojem arbitráže na trhu a je ukázáno, že při absenci arbitráže lze cenu zajišťovaného aktiva určit přesně (na kompletním trhu) nebo z vypočítaného intervalu (na nekompletním). Kapitola je teoreticky podepřena tvrzeními z lineárního a matematického programování o hledání maxima a dualitě úloh. Trochu netradičně je zde dokázán princip duality v lineárním programování pomocí tvrzení z obecnějšího matematického, a sice z Lagrangeova principu. Dokázána je též arbitrážní věta připomínající známé Farkasovo lemma.

V předchozích kapitolách byl vždy uvažován pouze čas současný a jeden budoucí. Ve čtvrté kapitole naproti tomu uvažujeme  $k$  po sobě následujících budoucích časů, pro  $k \geq 1$ . Konkrétně se rozebírá, jak zle stanovit současnou cenu evropské opce, jež se dá uplatnit v  $k$ -tém budoucím období. Je zde dokázána významná věta pro výpočet ceny a na příkladě s obrázkem ilustrován výpočet na základě statistických dat.

V práci se objevuje minimální množství matematických chyb, našel jsem pouze tyto:

- str. 3, Řešení prvního příkladu: Vektor  $x$  má být (znaménkově) opačný, tedy dluhopis se má nakoupit a akcie prodat.
- str. 15, 4. řádek: Místo "z 3.1 plyne" má být "z 1. části důkazu plyne".
- str. 17, 6. řádek: Místo "sečtením dostaneme" má být "úpravou dostaneme".
- str. 17, Důkaz arbitrážní věty: Předposlední odstavec pro  $A \neq 0$ ,  $S = 0$  neplatí. Protipříkladem je např.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- str. 23, 3. vzorec: Místo  $q_u \frac{C_{t+1}^{i+1}}{R}$  má být  $q_u \frac{C_{t+1}^i}{R}$ .

V práci se píše, že by mohla sloužit jako studijní materiál. K tomu bych doporučil více rozvést následující:

- str. 13, Definice regulárního bodu: Uvést příklad bodu a omezení  $g^i$ ,  $h^i$  tak, aby tento bod byl či naopak nebyl regulární.
- str. 13, Lagrangeův princip: Uvést interpretaci, že v bodě maxima směřuje gradient "ven" z přípustné množiny. Příp. ukázat, jak se může tvrzení "pokazit", není-li  $x^*$  regulární.
- str. 15, Důkaz principu duality: V 3. části dodat, že existence maxima  $x$  plyne z věty 3.3.
- str. 16, 4. řádek: Dodat, že arbitráž druhého typu je charakterizována též tím, že existuje  $x$  takové, že  $S^T x > 0$  a  $Ax = 0$ , jak plyne ze záměny  $x \rightarrow -x$ .
- str. 16, 6. odstavec: Ukázat, že cena aktiva je skutečně lineární.

- str. 18, poslední odstavec: Více okomentovat, proč existuje  $c$  tak, že  $cS^T = \psi'^T A$  (např. promluvit o (ko)dimenzi prostoru  $\{x; S^T x = 0\}$ ).
- str. 19, vzorec pro  $S_b$ : Uvést důkaz omezenosti množin, z nichž se počítá max a min.
- str. 20, uzávěr  $K$ : Dodát, že množina, u níž dokazujeme, že je rovna uzávěru  $K$ , je zřejmě uzavřená.
- str. 20: Dodát, že rovnost inf a min plyne ze spojitosti funkce  $\psi^T b$  a vlastnosti uzávěru  $K$ .

Práce má celkově zdařilou strukturu i obsah. Jakožto člověk s minimálními ekonomickými znalostmi jsem neměl se čtením problém. Všechny věty jsou korektně dokázány, včetně dost netriviálních důkazů arbitrážní věty a věty o dualitě v oceňování aktiv. Pouze u (studentům matematiky) známých tvrzení jsou uvedeny pouze odkazy na důkaz v literatuře. Některé pojmy jsou též ilustrovány příklady, nejdůležitější příklad je ve 4. kapitole. Cíl práce byl tedy jednoznačně splněn.

Po grafické stránce je práce na standardní úrovni, gramatické chyby jsem nenašel. Též všechny zdroje jsou korektně citovány, většinou v rámci odkazů na důkaz nebo definic pojmů.

Vzhledem k řečenému doporučuji uznat tuto práci jako bakalářskou a hodnotit známkou

**A.**

Brno 16.6.2014

Ing. Mgr. Tomáš Hebelka

#### **Otázky k obhajobě:**

1. Jak tedy opravit důkaz arbitrážní věty, aby fungoval též pro  $A \neq 0, S = 0$ ?
2. K příkladu ve 4. kapitole: Pokud bude tedy cena opce na trhu vyšší než oněch 81.36, a já ji vlastním, mám jakožto rozumný investor opci prodat a místo ní nakoupit ono portfolio za cenu 81.36?