

Oponentský posudek na diplomovou práci P. Beneše

Diplomová práce s názvem *Zákony reciprocity* je věnována přehledu teorie a aplikací kvadratického, kubického a bikvadratického zákona reciprocity. Práce navazuje jednak na autorovu bakalářskou práci na téma *Dělitelnost v oborech integrity*, jednak na běžně dostupné učební texty k předmětům povinným v učitelském studiu matematiky na PřF MU, což mu umožní poměrně rychle přejít k vlastnímu tématu práce bez rozsáhlého zavádění nových pojmů

V první kapitole autor čtenáře stručně seznamuje s okruhem algebraických celých čísel a rozšiřuje pojem kongruence na tato čísla. Druhá kapitola, zabývající se Legendreovým symbolem a kvadratickým zákonem reciprocity, vhodným způsobem doplňuje látku z předmětu Algebru 2 (a bude tak bezesporu vhodným studijním materiálem pro studenty tohoto předmětu). Kromě obvyklých tvrzení o Legendreově symbolu a elementárního důkazu zákona reciprocity pomocí vlastností celých částí a Gaussova lemmatu práce obsahuje další dva důkazy – jednak Eisensteinův důkaz využívající vlastností komplexních odmocnin z jedné, jednak i důkaz pomocí Gaussových sum, u nějž slibuje možnost zobecnění na vyšší zákony reciprocity. Autor rovněž stručně komentuje historický vývoj tohoto ústředního tématu teorie čísel.

Třetí kapitola je nejrozsáhlejší – věnuje se kubickému zákonu reciprocity. Autor čtenáře seznamuje s přece jen méně obvyklými Eisensteinovými čísly (okruhem $\mathbb{Z}[\omega]$, kde ω je komplexní třetí odmocnina z 1) a jejich aritmetikou (strukturou grupy jednotek, prvočinitele a tím, jak se racionální celá čísla rozkládají na prvočinitele). V další části kapitoly autor zavádí kubický mocninný symbol a odvozuje jeho vlastnosti. Uvádí zde i kubický zákon reciprocity a ukazuje jeho aplikace (včetně řešitelnosti celočíselných kongruencí a didakticky vhodného srovnání ze základní větou o jejich řešitelnosti). Závěr této kapitoly je věnován důkazu kubického zákona reciprocity. Za tímto účelem zobecňuje dříve definované kvadratické Gaussovy sumy a nově zavádí Jacobiho sumy včetně odvození všech potřebných výsledků.

Ve čtvrté kapitole je nastíněn obdobný postup pro bikvadratický zákon reciprocity. Domnívám se, že je zde velmi vhodně volena míra toho, které výsledky jsou uváděny a kde je čtenář odkázán na podobnost s kubickým případem či na literaturu. Autor se tak poměrně rychle dostane ke klíčovým aplikacím bez neúnosného zvětšení rozsahu práce.

Práce je z didaktického i odborného hlediska psána velmi kvalitně, rovněž typografická stránka je na vysoké úrovni. K textu nemám žádné podstatné obsahové připomínky, zmiňuji zde proto alespoň několik drobných nedostatků:

- s. 19 a 76: Zde nepovažuji za nejvhodnější (z didaktického hlediska) způsob určování těch prvočísel p , pro něž je $(p/5) = 1$, resp. $(p/7) = -1$ opakovaným využitím zákona kvadratické reciprocity. Vhodnější je (obdobně jak to autor uvádí v důkazu Věty 2.1.3) všechny kvadratické zbytky (resp.) nezbytky určit „hromadně“ umocněním všech možných zbytků na druhou.
- s. 20: Tabulku bych raději uvedl v jiné formě, z níž bude více patrný vliv Čínské zbytkové věty, např. uvedením konkrétních zbytků modulo 8, resp. 5 (Čínská zbytková věta je nicméně předpokladem kladeným na čtenáře, proto jde opět spíše o drobnou metodickou připomínku).

- Některé méně vhodné formulace:

- s. 23: ... kořeny polynomu $x^6 - 1 = 0$ v okruhu $\mathbb{C}[x]$.
- s. 45: ... injektivní homomorfismus konečné grupy **na** sebe musí být automorfismem.
- s. 50: ... pro χ, λ zavádíme operaci $\cdot$ jako zobrazení přiřazující prvku a číslo $\chi(a)\lambda(a)$.

Práce je psána přehledně a vzhledem ke zvolenému tématu i čtivě. Diplomant prokázal schopnost pracovat s mnoha zdroji (včetně cizojazyčných) a zároveň k nim kriticky přistupovat a čerpat z nich podle vlastního úsudku.

Celkově považuji práci za zdařilou a jsem přesvědčen, že autor splnil zadání diplomové práce a dostál standardům kladeným na práci v učitelském studiu matematiky. Doporučuji proto práci uznat jako diplomovou a v případě úspěšné obhajoby navrhuji práci hodnotit známkou **výborně**.



V Brně, 7. června 2010

Mgr. Michal Bulant, Ph.D.