

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA MASARYKOVY UNIVERZITY

Užití modelu CAPM při tvorbě portfolia

Diplomová práce

Jméno a příjmení autora:	Hana Kotulková
Název diplomové práce:	Užití metody CAPM při tvorbě portfolia
Název práce v angličtině:	Use of model CAPM by portfolio creation
Fakulta:	Přírodovědecká
Vedoucí práce:	RNDr. František Čámský
Rok obhajoby:	2008

Anotace v češtině:

Tato diplomová práce se zabývá modelem CAPM (Model oceňování kapitálových aktiv). První kapitola je věnována teoretickým základům, předpokladům modelu, vlastnostem a užití modelu. CAPM, jenž je široce využívaný v moderních analýzách portfolií, umožní investorovi vytvořit portfolio, které se chová shodně s trhem jako celkem, neboť v modelu je rovnovážný výnos aktiv lineární funkcí systematického (tržního) rizika. Tržní riziko je tedy odhadem jeho citlivosti na pohyby celého trhu, která se obvykle měří koeficientem beta a tento odhad bety je v práci podrobně vysvětlen. Druhá část diplomové práce je věnována praktickým výpočtům, kde na základě teoretických předpokladů a na reálných datech BCPP je vypočítán výnos a riziko čtvrtletně drženého portfolia, které má být sestaveno z pěti nejlikvidnějších cenných papírů obchodovatelných na BCPP.

Annotation in English:

This graduation thesis deals with model CAPM (Capital Asset Pricing Model). The first chapter presents theoretic essentials, model assumptions, attributes and use of the model. By the model CAPM that is widely used in modern portfolio analysis can investor create portfolio, which have the same movement as all market, since expected return is in relationship to systematic (market) risk. Thus the market risk estimation is sensitivity of security to market fluctuations. This sensitivity is usually measured by coefficient beta and this beta estimation is in thesis in detail demonstrated. The second chapter denotes practical purposes based on theoretical assumptions and real date BCPP. There is calculated expected return and 3-month-portfolio risk that is composed of five the most cashable securities tradeable on BCCP.

Klíčová slova v češtině:

Teorie portfolia, cenné papíry, risk portfolia, očekávaná výnosnost portfolia, CAPM - Model oceňování kapitálových aktiv, koeficient beta, odhad bety, SML, CML, prodej nakrátko

Keywords:

Portfolio theory, securities, portfolio risk, expected return of the portfolio, CAPM - The capital asset pricing model, coefficient beta, beta's estimations, SML, CML, sell short

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jsem pouze citované prameny. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

Brno, 2008

.....
Hana Kotulková

Ráda bych na tomto místě poděkovala všem, kteří mi s prací pomohli, především
mému vedoucímu práce panu RNDr. Františku Čámskému.

Obsah

Úvod	2
1 Teoretická východiska	4
1.1 Markowitzova teorie, z které CAPM vycházel	4
1.2 Předpoklady pro stanovení tržní ceny všech aktiv pomocí CAPM	7
1.3 Přímka CML	8
1.4 Přímka SML	9
1.5 Beta koeficient	11
1.6 Tržní a jedinečné riziko	14
1.7 Alfa koeficient - míra nerovnováhy	17
1.8 Určení optimálního portfolia	19
1.9 Odhadnutí bety	25
1.9.1 Nepřizpůsobené bety	25
1.9.2 Stabilita koeficientu β v čase	32
1.9.3 Přizpůsobené odhady bet	34
1.9.4 Fundamentální bety	38
1.10 Kritika modelu CAPM	40
1.10.1 Empirické studie modelu CAPM	41
2 Praktické výpočty na datech BCPP	43
2.1 Informace o Burze cenných papírů Praha, a.s.	43
2.2 Výběr dat	44
2.2.1 Výpočet výnosností akcií a trhu	47
2.3 Výpočet alfy a bety	47
2.4 Výnosnost a riziko tří měsíce drženého portfolia	54
2.4.1 Výpočet podílů jednotlivých vybraných cenných papírů v portfoliu	55
2.4.2 Výpočet výnosnosti a rizika portfolia	56
Závěr	57
A Výčet měsíčních výnosností	59
B Grafické řešení odhadu parametrů	60
Literatura	60

Úvod

Investování na kapitálových trzích je zajímavou možností, jak poměrně významně navýšit své finanční prostředky buďto pro samotné obohacení, anebo k dalšímu investování. Důležité je vytvoření různých strategií, jejichž hlavním cílem je eliminovat případné vysoké ztráty.

Pro řízení investiční strategie lze spolehlivě využít teorii portfolia. I když teorie staví na předpokladech požadujících dokonale konkurenční trh, lze ji aplikovat i na rozvinutém reálném trhu cenných papírů. U rozvíjejících trhů ji lze také využít, ale zde naráží na nedostatky v podobě nedostatku dat pro spolehlivé odhady a na nestabilitu trhu.

Výnosy a rizika na reálném kapitálovém trhu vyvažuje nejlépe optimální portfolio, proto investoři usilují o jeho sestavení, tak své peníze nejlépe zhodnotí a vyhnou se znehodnocení.

Cílem práce je zabývat se teoretickými východisky oceňování metodou The capital asset pricing model (CAPM), jenž je široce využívána v moderních portfoliových analýzách. CAPM je matematickým modelem, který se snaží o vysvětlení vztahu mezi rizikem a návratností cenných papírů. V letech 1964 – 1966 jej paralelně a nezávisle na sobě rozvinuli W. F. Sharpe, J. Lintner a J. Mossin, kdy se jejich bádání objevilo ve třech, vysoce respektovaných žurnálech. Základy jsou položeny na dřívějších pracích H. Markowitze a J. Tobina, která vznikly na počátku 50. let 20. století.

Metoda CAMP přináší nový pohled na oceňování jednotlivých cenných papírů. Sharpův model rozšiřuje dosavadní teorii na rovnovážnou teorii trhu kapitálových aktiv. Podstatou modelu je myšlenka rovnováhy - riziku (koeficientu beta) příslušnému k určité investici (např. akcii) jsou úměrné budoucí výnosy, ale i budoucí ztráty investice. CAMP tedy objasňuje vztah, jakým jsou očekávaná výnosnost a beta svázány. Model CAPM umožní investorovi vytvořit portfolio, které se chová shodně s trhem jako celkem, neboť v modelu je rovnovážný výnos aktiv lineární funkcí systematického (tržního) rizika.

V roce 1990 získal W.F. Sharpe za CAPM Nobelovu cenu za ekonomii (současně s H.M. Markowitzem a M.H. Millerem) za průkopnickou práci v oblasti ekonomie a financí korporací. Myšlenkový model CAPM se stal základem řady běžných praktik

v odvětví investic pro jeho jednoduchost, elegantnost a snadné otestování. I po padesáti letech od svého vzniku se široce používá, i když se hojně diskutuje o jeho platnosti.

Rozšíření modelu CAMP dnes existuje v různých modifikacích, každá varianta modelu se soustřeďuje na vysvětlování vybraného problému. V práci se omezíme pouze na původní verzi.

Po teoretických výčtech následně sestavíme optimální portfolio v podmínkách Burzy cenných papírů Praha (BCPP). Portfolio má být vytvořeno z pěti cenných papírů, které patří mezi nejlikvidnější obchodované na BCPP a má být čtvrtletně držené. Zajímat nás bude jeho očekávaná výnosnost a riziko.

Kapitola 1

Teoretická východiska

1.1 Markowitzova teorie, z které CAPM vycházel

Harry Markowitz v teorii předpokládá, že investoři maximalizují svůj užitek výběrem jejich optimálního portfolia v následujících fázích:

- **analýza cenných papírů** (investorův subjektivní odhad očekávané výnosnosti a rizika jednotlivých cenných papírů)
- **analýza portfolia** (investor početně rozhoduje o poměru zastoupení vybraných cenných papírů v jeho portfoliu na základě očekávané výnosnosti a rizika změny portfolia, tedy nezávisle na jeho očekávání a preferencích)
- **výběr optimálního portfolia** (investor vybírá podle jeho preferencí).

Pro výpočet budoucí (očekávané) výnosnosti cenného papíru je nutné znát, jak se změnila tržní cena za období držení cenného papíru, **výnosnost**¹ lze vyjádřit vzorcem²:

$$r_{i_t} = \frac{P_{i_t} - P_{i_{t-k}}}{P_{i_{t-k}}} \quad (1.1)$$

r_{i_t} výnosnost cenného papíru
 P_{i_t} tržní cena cenného papíru na začátku následujícího období
 $P_{i_{t-k}}$ tržní cena cenného papíru na začátku období

Očekávaná výnosnost cenného papíru $\bar{r}_i$:

$$\bar{r}_i = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T r_{i_t} \quad (1.2)$$

T počet období

¹Uvažujeme pouze kapitálový výnos, tedy nezapočítáváme dividendový výnos.

²Parametr k bývá při praktických odhadech většinou pevně zvolen, pokud $k = 1$, jedná se o jednodenní změnu tržní ceny cenného papíru.

Očekávaná výnosová míra $\bar{r}_p$ (střední hodnota) **portfolia:**

$$\bar{r}_p = \sum_{i=1}^n X_i \cdot \bar{r}_i \quad (1.3)$$

n počet cenných papírů v portfoliu

X_i podíl i -tého cenného papíru v portfoliu, musí být splněna podmínka:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1$$

Riziko změny výnosnosti (směrodatná odchylka) **cenného papíru σ_i :**

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^n (r_{it} - \bar{r}_i)^2} \quad (1.4)$$

Riziko σ_p (směrodatná odchylka) **portfolia:**

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij}} \quad (1.5)$$

$X_1, \dots, X_n$ procentuální zastoupení jednotlivých cenných papírů v portfoliu

σ_{ij} kovariance očekávaných výnosností mezi cennými papíry i, j

ρ_{ij} korelační koeficient mezi i -tým a j -tým cenným papírem, jehož

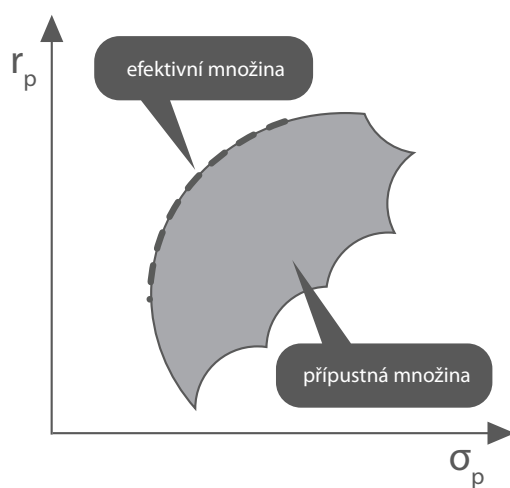
hodnota musí ležet v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, platí: $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$.

Přípustnou množinu tvoří všechny možné kombinace cenných papírů, z kterých může investor vytvořit nekonečný počet portfolií (proto jsou zobrazena pomocí zakřivené křivky). Efektivní množina je na obrázku 1.1 vyznačena zvýrazněnou přerušovanou čarou, která značí portfolia s nejnižším rizikem při dané výnosové míře, nebo portfolia s nejvyšší očekávanou výnosovou mírou při daném riziku.

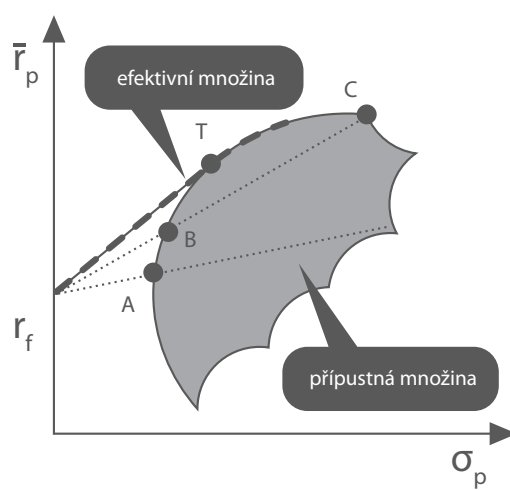
Model CAPM rozvíjí Markowitzovu efektivní množinu o existenci bezrizikového aktiva a zkoumá jeho vliv na ni.

Uvažujeme, že je na trhu k dispozici každému investorovi jen jeden druh *bezrizikového aktiva*. Očekávaný výnos ³ takového bezrizikového aktiva je r_f a jeho riziko změny výnosu je rovno nule. Mějme riziková portfolia A,B,C a T náležející do efektivní množiny. Všechny kombinace rizikových portfolií s bezrizikovým aktivem budou ležet na polopřímkách, jak je znázorněno na obrázku 1.2 a vznikne tak nová efektivní množina. T, jenž je bodem dotyku tečny k původní efektivní množině, je označováno jako *tangenciální portfolio*.

³Výnos bezrizikového aktiva je roven výnosu krátkodobých vládních dluhopisů nebo výnosu pokladničních poukázek.

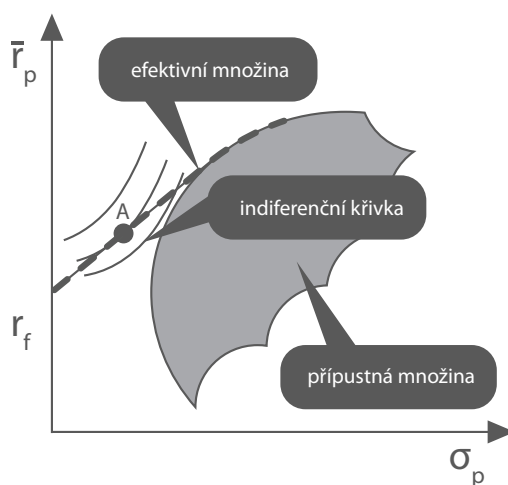


Obrázek 1.1: Přípustná a efektivní množina.



Obrázek 1.2: Kombinace rizikových portfolií s bezrizikovým aktivem.

Optimální portfolio je takové portfolio, které náleží do efektivní množiny a současně leží na investorově nejvyšší indifferenční křivce (tj. portfolio A), viz. obrázek 1.3. Investor s vyšší averzí k riziku volí portfolio ležící na úsečce vycházející z bodu $[0, r_f]$ vedoucí do bodu T.



Obrázek 1.3: Volba portfolio.

1.2 Předpoklady pro stanovení tržní ceny všech aktiv pomocí CAPM

1. Portfolio se stanovuje v horizontu jednoho období a je hodnoceno podle očekávaného výnosu a očekávaného rizika.
2. Předpoklad nenasycenosti investora, tj. z portfolií se stejným očekávaným rizikem je vybráno portfolio s vyšší očekávanou výnosností.
3. Investoři jsou rizikově averzní, tj. z portfolií se stejným očekávaným výnosem si vyberou to s nižším rizikem.
4. Počet aktiv je fixní a všechna portfolio jsou nekonečně dělitelná.
5. Existuje bezrizikové aktivum se sazbou r_f .
6. Zanedbáváme daně a transakční náklady.
7. Všichni investoři jsou si rovni:⁴

⁴Čámský F.: Teorie portfolio, str. 57, Masarykova univerzita, 2007.

- mají stejný horizont jednoho období
- platí pro ně stejná bezriziková sazba
- informace jsou zdarma a jsou dostupné všem investorům
- mají stejná, homogenní očekávání ohledně budoucnosti, tj. mají stejně odhadnuté očekávané výnosnosti, rizika a kovariance cenných papírů.

1.3 Přímka CML

Z uvedených předpokladů vyplývá, že investoři díky homogennímu očekávání při analýze cenných papírů získají stejné tangenciální portfolio. Dále efektivní množina je pro všechny investory stejná, je tvořena investicí do tangenciálního portfolia spolu s určitým množstvím bezrizikového vypůjčení nebo zapůjčení, různá volba portfolia je způsobena pouze různými křivkami indiference. Ikdyž se vybraná portfolia budou lišit, vždy bude zachována stejná kombinace rizikových cenných papírů. Tuto vlastnost shrnuje tzv. *separační teorém*:

Optimální kombinace rizikových cenných papírů může být stanovena bez jakékoliv znalosti investovaných postojů k riziku a výnosnosti.⁵

V rovnovážném bodě musí mít každý cenný papír nenulový podíl na skladbě tangenciálního portfolia. Tohoto rovnovážného stavu je dosaženo:

- pokud každý investor chce vlastnit určitý podíl na každém rizikovém cenném papíru
- aktuální tržní ceny všech cenných papírů odpovídají vyrovnaní nabídky a poptávky po stejném množství kusů
- bezriziková sazba odpovídá vyrovnaní množství peněz půjčených a vypůjčených.

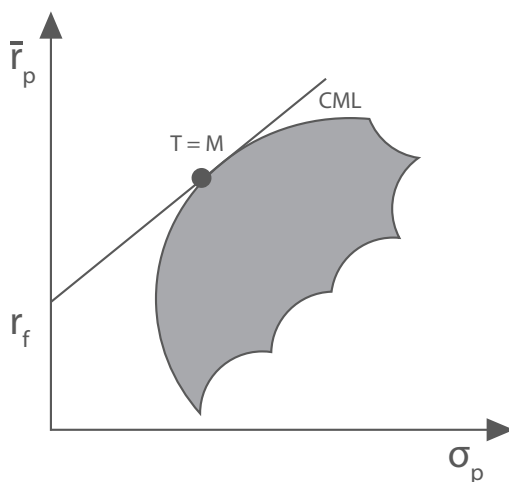
Výsledné tangenciální portfolio bude odpovídat svými proporcemi *tržnímu portfoliu*, které definujeme:

Portfolio tvořené investicemi do všech cenných papírů v takovém poměru, že proporce investovaná do jednotlivého cenného papíru odpovídá jeho relativní tržní hodnotě, se nazývá tržní portfolio. Relativní tržní hodnotou cenného papíru rozumíme agregovanou tržní hodnotu cenného papíru dělenou sumou agregovaných hodnot všech cenných papírů.⁶

Je tedy běžné odvolávat se na tangenciální portfolio jako na tržní portfolio a označuje se písmenem M (market) místo T (tangency). V denní praxi je tržní portfolio nahrazováno nejrozumnějšími indexy.

⁵Sharpe, William F., Alexander, Gordon J.-Investice, str.167, Praha : Victoria Publishing, 1994.

⁶Sharpe, William F., Alexander, Gordon J.-Investice, str.169, Praha : Victoria Publishing, 1994.



Obrázek 1.4: Přímka kapitálového trhu.

Všechna efektivní portfolia leží na polopřímce s počátkem v bodě $[0, r_f]$ a procházející bodem $M[\sigma_M, r_M]$. Tato lineární efektivní množina je známa jako **přímka kapitálového trhu (Capital Market Line-CML)**. Neefektivní portfolia, tedy jiná než s tržním portfoliem a bezrizikovým zapůjčením a vypůjčením, leží pod přímkou CML. Směrnice přímky kapitálového trhu se rovná rozdílu mezi očekávanou výnosností tržního portfolia a očekávanou výnosností bezrizikového aktiva $\bar{r}_M - r_f$ dělenému rozdílem jejich rizik $\sigma_M - \sigma_f - 0 = \sigma_M$, neboť $\sigma_f = 0$ (bezrizikové aktivum).

$$\bar{r}_p = r_f + \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M} \cdot \sigma_p \quad (1.6)$$

M tržní portfolio

$\bar{r}_M$ očekávaná výnosnost tržního portfolia

r_f očekávaná výnosnost bezrizikového aktiva

Investoři si zvolí buď tržní portfolio M , nebo upřednostní podle svých preferencí kombinaci tržního portfolia M a půjčky, či vypůjčky za bezrizikovou sazbu. Výše bezrizikové sazby r_f odráží cenu času nebo-li cenu odložené spotřeby, sklon CML je cena za riziko.

1.4 Přímka SML

Přímka trhu cenných papírů (Security Market Line- SML)⁷

vyjadřuje vztah mezi očekávanou výnosovou mírou a kovariancí σ_{iM} pro každé ak-

⁷Sharpe, William F., Alexander, Gordon J.-Investice, str.171 – 173, Praha : Victoria Publishing, 1994.

tivum. Je platná jak pro efektivní, tak i pro neefektivní jednotlivé cenné papíry i portfolia, zatímco přímka CML reprezentuje vztah mezi očekávanou výnosností a směrodatnou odchylkou efektivních portfolií. Jednotlivé cenné papíry držené samostatně nejsou efektivní, a tedy jsou vždy zobrazeny pod přímkou CML.

Riziko změny výnosnosti tržního portfolia si odvodíme ze známého výrazu pro výpočet rizika (směrodatné odchylky) pro portfolio (viz. rovnice 1.5):

$$\sigma_M = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{iM} X_{jM} \sigma_{ij}} \quad (1.7)$$

X_{iM}, X_{jM} proporce investované do cenných papírů i, j v tržním portfoliu

Rovnici můžeme také zapsat následovně:

$$\sigma_M = \sqrt{X_{1M} \sum_{j=1}^n X_{jM} \sigma_{1j} + X_{2M} \sum_{j=1}^n X_{jM} \sigma_{2j} + \dots + X_{nM} \sum_{j=1}^n X_{jM} \sigma_{nj}} \quad (1.8)$$

Kovariance cenného papíru i s tržním portfoliem (σ_{iM}) pak bude:

$$\sigma_{iM} = X_{1M} \sigma_{1j} + X_{2M} \sigma_{2j} + \dots + X_{nM} \sigma_{nj} \quad (1.9)$$

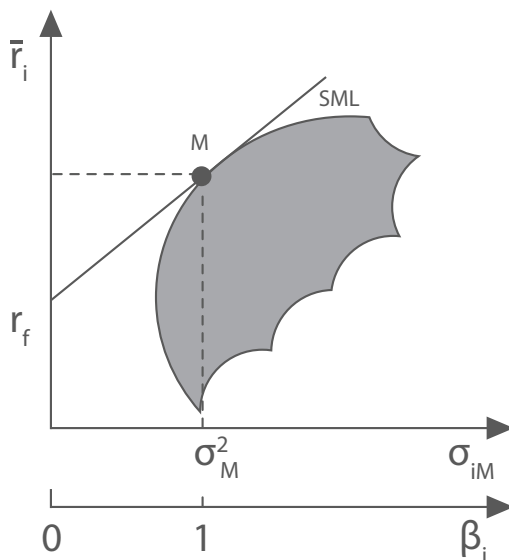
$$\sigma_M = \sqrt{X_{1M} \sigma_{1M} + X_{2M} \sigma_{2M} + \dots + X_{nM} \sigma_{nM}} \quad (1.10)$$

kde σ_{iM} označuje kovarianci cenného papíru i s tržním portfoliem, tedy σ_{1M} vyjadřuje kovarianci cenného papíru 1 s tržním portfoliem, σ_{2M} vyjadřuje kovarianci cenného papíru 2 s tržním portfoliem atd. Jako váhy bereme proporce odpovídajících cenných papírů v tržním portfoliu.

Z uvedené rovnice vyplývá, že *podstatnou míru rizika cenného papíru tvoří jeho kovariance s tržním portfoliem σ_{iM}* . Aktiva s vyšší kovariancí σ_{iM} představují pro investora větší riziko a měly by mít tedy vyšší očekávanou výnosovou míru, aby byly pro investora zajímavé. Kdyby však tyto cenné papíry vyšší výnosnost neposkytovaly a přispívaly by pouze k vyššímu riziku tržního portfolia, potom by to vedlo k vyloučení těchto cenných papírů z tržního portfolia, čímž by nastalo zvýšení očekávané výnosnosti tohoto portfolia vzhledem ke směrodatné odchylce. Protože investoři by pohlíželi na takovouto změnu jako na přínos, nebylo by již tržní portfolio optimálním rizikovým portfoliem. Ceny cenných papírů by již nebyly v rovnováze. Rovnovážný vztah mezi rizikem a výnosností zapíšeme:

$$r_i = r_f + \frac{r_M - r_f}{\sigma_M^2} \sigma_{iM} \quad (1.11)$$

Na obrázku 1.5 je znázorněna jak kovarianční verze, tak také beta verze přímky SML.



Obrázek 1.5: Přímka cenných papírů.

1.5 Beta koeficient

Rovnici přímky SML lze převést na základní vztah modelu CAPM jiným způsobem, který ukazuje, že očekávaný výnos aktiva by se měl rovnat součtu bezrizikové sazby a rizikové prémie i -tého aktiva.

$$r_i = r_f + (r_M - r_f) \cdot \beta_i, \quad (1.12)$$

kde člen beta je definován jako: $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$

Beta portfolio je váženým průměrem beta jednotlivých cenných papírů tvořících toto portfolio.

$$\beta_p = \sum_{i=1}^n X_i \beta_i = X_1 \beta_1 + X_2 \beta_2 + \dots + X_n \beta_n \quad (1.13)$$

Koeficient β_i měří citlivost výnosnosti cenného papíru na změny tržní výnosové míry. Pro tržní portfolio M je beta 1 a jeho očekávaná výnosnost je r_M . Bezrizikové cenné papíry mají betu nulovou s očekávanou výnosností r_f . Body se souřadnicemi $[0, r_f]$ a $[1, r_M]$ stačí ke sestrojení přímky SML, která označuje průměrné očekávané výnosnosti cenných papírů a portfolio s různými hodnotami beta.

O β můžeme předpokládat:

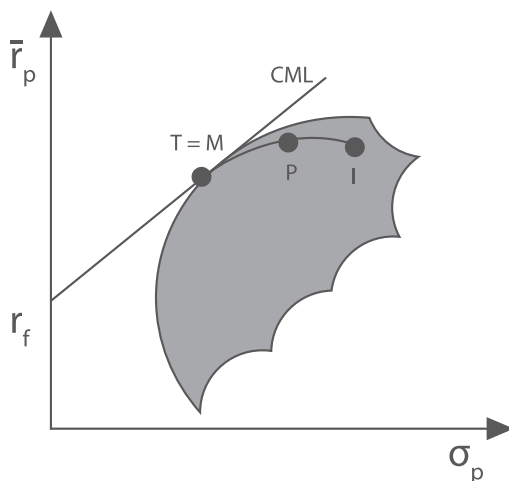
- je-li $\beta_i > 1$, jsou cenné papíry klasifikovány jako agresivní, výnosová míra i -tého aktiva stoupá rychleji než výnosová míra tržního portfolia (reagují na 1% nárůst očekávané výnosové míry tržního portfolia zvýšením svého dodatečného výnosu o více než 1%)
- je-li $\beta_i < 1$, jsou cenné papíry klasifikovány jako defenzivní, výnosy kolísají méně než trh
- je-li $\beta_i = 1$, jsou cenné papíry neutrální, výnosová míra i -tého aktiva se chová identicky jako výnosová míra tržního portfolia.

Hodnoty bety pod 0.5 a nad 2 jsou považovány za neobvyklé a dlouhodobě neudržitelné.

Důkaz. {Odvození přímky trhu SML pomocí přímky CML.}

Vyberme jeden z cenných papírů z přípustné množiny, kde leží všechny rizikové papíry a označme jej indexem I. Dále uvažujme libovolné portfolio P, X_i představuje proporci investovanou do cenného papíru I a $(1 - X_i)$ proporci do tržního portfolia P.

Portfolio P bude ležet na křivce mezi I a T (popřípadě i za T), která je tečnou k efektivní množině v bodě T, jak je zobrazeno na obrázku 1.6.



Obrázek 1.6: Rizikový cenný papír.

Očekávanou výnosnost rizikového papíru I označíme $\bar{r}_i$, pak očekávaná výnosnost portfolia P $\bar{r}_p$ bude:

$$\bar{r}_p = X_i \bar{r}_i + (1 - X_i) \bar{r}_M \quad (1.14)$$

a riziko změny výnosnosti bude mít:

$$\sigma_p = \sqrt{X_i^2 \sigma_i^2 + (1 - X_i)^2 \sigma_M^2 + 2X_i(1 - X_i)\sigma_{iM}} \quad (1.15)$$

Všechna tato portfolia budou ležet na křivce. Abychom získali její směrnici, derivujeme $\bar{r}_p$ podle X_i :

$$\frac{d\bar{r}_p}{dX_i} = \bar{r}_i - \bar{r}_M \quad (1.16)$$

a derivujeme σ_p též vzhledem k X_i :

$$\frac{d\sigma_p}{dX_i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2X_i\sigma_i^2 - 2(1 - X_i)\sigma_M^2 + 2\sigma_{iM} - 4X_i\sigma_{iM}}{\sqrt{X_i^2\sigma_i^2 + (1 - X_i)^2\sigma_M^2 + 2X_i(1 - X_i)\sigma_{iM}}} \quad (1.17)$$

Potom směrnice tečny křivky bude:

$$\frac{\frac{d\bar{r}_p}{dX_i}}{\frac{d\sigma_p}{dX_i}} = \frac{d\bar{r}_p}{d\sigma_p} = \frac{\sqrt{X_i^2\sigma_i^2 + (1 - X_i)^2\sigma_M^2 + 2X_i(1 - X_i)\sigma_{iM}} \cdot (\bar{r}_i - \bar{r}_M)}{X_i\sigma_i^2 - (1 - X_i)\sigma_M^2 + \sigma_{iM} - 2X_i\sigma_{iM}} \quad (1.18)$$

Proporce rizikového cenného papíru i je v bodu M nulová, což znamená, že $X_i = 0$. Můžeme vypočítat směrnici této tečny:

$$\frac{d\bar{r}_p}{d\sigma_p} = \frac{(\bar{r}_i - \bar{r}_M)\sigma_M}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2} \quad (1.19)$$

Mezi směrnici tečny křivky $[iM]$ v bodu M a směrnici přímky CML $\frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M}$ musí platit rovnost:

$$\frac{(\bar{r}_i - \bar{r}_M)\sigma_M}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2} = \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M} \quad (1.20)$$

Upravíme:

$$\bar{r}_i - \bar{r}_M = \frac{(\bar{r}_M - r_f)\sigma_{iM} - (\bar{r}_M - r_f)\sigma_M^2}{\sigma_M^2} \quad (1.21)$$

$$\bar{r}_i - \bar{r}_M = \bar{r}_M - r_f + (\bar{r}_M - r_f)\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} \quad (1.22)$$

Získáme přímku SML (kovarianční verze přímky SML):

$$r_i = r_f + \frac{r_M - r_f}{\sigma_M^2} \cdot \sigma_{iM} \quad (1.23)$$

Jestliže zavedeme substituci: $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$, lze SML vyjádřit v beta verzi jako:

$$r_i = r_f + (r_M - r_f)\beta_i \quad (1.24)$$

□

1.6 Tržní a jedinečné riziko

Předpovídání výnosnosti cenných papírů je založeno na vztahu dvou modelů - modelu pro očekávané (neboli střední) výnosnosti (SML se dvěma komponentami) a modelu pro skutečné výnosnosti (charakteristická přímka se třemi komponentami). Očekávaná (rovnovážná) výnosnost cenného papíru i v nadcházející periodě držení je dána rovnicí:

$$r_i^e = r_f + (\bar{r}_M - r_f)\beta_i \quad (1.25)$$

r_i^e rovnovážná očekávaná výnosnost cenného papíru i

Charakteristická přímka je typem procesu generujícího výnosnost, který garantuje skutečnou výnosnost cenného papíru a je založen na rovnici:

$$r_i - r_f = (r_M - r_f)\beta_i + \varepsilon_i \quad (1.26)$$

ε_i náhodná chyba cenného papíru i

Náhodná chyba ε_i je zahrnuta v rovnici, aby byla přesně vystihnuta situace na trhu, na kterých dochází ke změnám působením různých faktorů. Náhodná veličina má nulovou očekávanou (střední) hodnotou a směrodatnou odchylku σ_{ε_i} . Je běžnou praxí používat následující rovnici, která se často nazývá *model trhu*:

$$r_i = \alpha_i + r_M\beta_i + \varepsilon_i, \quad (1.27)$$

kde α_i je konstanta sloužící k zavedení substituce: $\alpha_i = r_f(1 - \beta_i)$, pokud bude použita bezriziková investice.

Odvodíme si z rovnice (1.26) vztah mezi celkovým rizikem cenného papíru i měřeného jeho směrodatnou odchylkou σ_i a faktorem beta, který je důležitou mírou rizika cenného papíru:

$$\begin{aligned} r_i - r_f &= (r_M - r_f)\beta_i + \varepsilon_i \\ \text{var}(r_i - r_f) &= \text{var}[(r_M - r_f)\beta_i + \varepsilon_i] \\ \text{var}(r_i) - \text{var}(r_f) &= \text{var}(r_M\beta_i) - \text{var}(r_f\beta_i) + \text{var}(\varepsilon_i) \\ \sigma_i^2 - 0 &= \underbrace{\beta_i^2\sigma_M^2 - \beta_i^2\sigma_f^2}_0 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 \end{aligned}$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 \quad (1.28)$$

Celkové riziko⁸ cenného papíru si můžeme rozložit na dvě komponenty:

⁸Sharpe, William F., Alexander, Gordon J.-Investice, str.177 – 186, Praha : Victoria Publishing, 1994.

$\beta_i^2 \sigma_M^2$	tržní riziko (systematické riziko)
$\sigma_{\varepsilon_i}^2$	jedinečné riziko (netržní, nesystematické riziko)

Tržní riziko souvisí s rizikem tržního portfolia a s betou cenného papíru. Vyšší beta u cenných papírů bude souviset s větším množstvím tržního rizika a vyšší očekávanou výnosností. Tržní riziko je způsobeno faktory, které ovlivňují ceny všech cenných papírů obchodovaných na burze, tedy máme na mysli makroekonomické, politické, sociální změny apod. Typickým příkladem rizika trhu jsou změny v očekávání inflace. Za systematické riziko změny také považujeme působení takových faktorů, které ovlivňují pouze určitou skupinu cenných papírů (např. zdražení určitého typu suroviny). Systematické riziko je **nediverzifikovatelné**, neboť se váže k pohybu celého tržního portfolia.

Podíl systematického rizika na celkovém riziku cenného papíru určuje *koeficient determinace*, který vyjadřuje schopnost tržního modelu vysvětlit pohyby ve výnosech jednotlivých akcií na trhu. Lze jej odvodit ze vztahu:

$$\rho_{iM} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_i \sigma_M} = \frac{\beta_i \sigma_M^2}{\sigma_i \sigma_M} = \frac{\beta_i \sigma_M}{\sigma_i} \quad (1.29)$$

Koeficient determinace je pak druhá mocnina odvozeného vztahu, tedy:

$$\frac{\beta_i^2 \sigma_M^2}{\sigma_i^2} \quad (1.30)$$

Jedinečné riziko není spojeno s beta cenného papíru, není důvod k předpokladu, že vyšší rizikovost bude znamenat vyšší očekávanou výnosnost. Jde o část rizika, která je jedinečná pro daný podnik, obor atd. Může to být způsobeno špatnou činností managementu, restrukturalizací podniku, přechodem na novou technologii, živelnou pohromou či úspěšnou reklamní kampaní apod. Tržní pohyb nemá žádný vliv na jedinečné riziko, riziko můžeme snížit **diverzifikací**.

Celkové riziko portfolia

Výnosnost každého rizikového papíru vztaženou k výnosnosti tržního portfolia jsme si už odvodili, nyní odvodíme skutečnou nadměrnou výnosnost portfolia složeného z n cenných papírů s váhami $X_1, X_2, \dots, X_n$:

$$\bar{r}_p - r_f = \sum_{i=1}^n X_i r_i - r_f \quad (1.31)$$

Neboť platí, že $\sum_{i=1}^n X_i = 1$ a $r_f = \text{konst.}$, můžeme rovnici zapsat ve tvaru:

$$\bar{r}_p - r_f = \sum_{i=1}^n X_i r_i - \sum_{i=1}^n X_i r_f = \sum_{i=1}^n X_i (\bar{r}_i - r_f) \quad (1.32)$$

Dále dosadíme za $\bar{r}_i - r_f$ pravou stranu rovnice $\bar{r}_i - r_f = (r_M - r_f)\beta_i + \varepsilon_i$ a výsledkem bude tato charakteristická přímka portfolia:

$$\bar{r}_p - r_f = \sum_{i=1}^n X_i [(r_M - r_f)\beta_i + \varepsilon_i] = (r_M - r_f) \underbrace{\sum_{i=1}^n X_i \beta_i}_{\beta_p} + \underbrace{\sum_{i=1}^n X_i \varepsilon_i}_{\varepsilon_p} \quad (1.33)$$

$$\bar{r}_p - r_f = (r_M - r_f)\beta_p + \varepsilon_p \quad (1.34)$$

β_p beta portfolia - vážený průměr beta jednotlivých cenných papírů
 ε_p vážený průměr náhodných chyb cenných papírů

Z rovnice (1.34) odvodíme celkové riziko portfolia:

$$\text{var}(r_p - r_f) = \text{var}[(r_M - r_f)\beta_p + \varepsilon_p] \quad (1.35)$$

$$\text{var}(r_p) - \text{var}(r_f) = \text{var}(r_M\beta_p) - \text{var}(r_f\beta_p) + \text{var}(\varepsilon_p) \quad (1.36)$$

$$\sigma_p^2 - 0 = \beta_p^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_p}^2 \quad (1.37)$$

$\beta_p^2 \sigma_M^2$ tržní riziko (systematické riziko)
 $\sigma_{\varepsilon_p}^2$ jedinečné riziko (netržní, nesystematické riziko)

U *tržního rizika portfolia* obecně platí, že čím více různých cenných papírů je v portfoliu, tím menší bude každá proporce a nebude to mít za následek výrazné snížení nebo zvýšení bety portfolia. Diverzifikace tedy vede k průměrování tržního rizika.

U *jedinečného rizika portfolia* naopak platí, že čím více je portfolio diverzifikováno, tím je podstatně menší jeho jedinečné riziko a v důsledku toho i celkové riziko. Tzn. lze dokázat, že s rostoucím počtem různých typů cenných papírů v portfoliu jedinečné riziko klesá.

Důkaz. {S větší diverzifikací portfolia klesá jedinečné riziko.}

Jestliže použijeme předpoklad, že cenné papíry mají v portfoliu stejnou váhu, tzn. $X_i = \frac{1}{n}$, pak platí:

$$\sigma_{\varepsilon_p}^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} \cdot \sigma_{\varepsilon_i}^2 = \frac{1}{n} \frac{\sigma_{\varepsilon_1}^2 + \sigma_{\varepsilon_2}^2 + \dots + \sigma_{\varepsilon_n}^2}{n} \quad (1.38)$$

Může to být vyjádřeno jako $1/n$ krát průměrné reziduální riziko v portfoliu. Jak se počet akcií v portfoliu zvyšuje, tím se drasticky zmenšuje průměrné reziduální riziko, tedy větší diverzifikací portfolia roste počet cenných papírů, tj. n se zvětšuje, to ale znamená že $\frac{1}{n}$ se zmenšuje, výsledné portfolio má menší riziko. $\square$

1.7 Alfa koeficient - míra nerovnováhy

Nesprávným ohodnocením cenných papírů může dojít ke dvěma případům:

- **cenný papír je podhodnocený** (příliš levný), je-li jeho očekávaná výnosnost vyšší než příslušná očekávaná výnosnost cenných papírů se srovnatelnou betou - leží nad SML
- **cenný papír je nadhodnocený** (příliš drahý), je-li jeho očekávaná výnosnost nižší než příslušná očekávaná výnosnost cenných papírů se srovnatelnou betou - leží pod SML.

Mnoho investorů vyhledává nesprávně ohodnocený cenný papír. Předpokládají, že většina cenných papírů je ohodnocena tak, že jsou ve shodě s danou rovnovážnou teorií a dávají rovnovážnou očekávanou výnosnost a ostatní jsou nesprávně ohodnoceny a nejsou v rovnováze. Investoři se neshodují v tom, které cenné papíry jsou nesprávně ohodnoceny, proto je následující výklad prováděn z pohledu jednoho investora.

Rozsah investorovy víry v nesprávné ohodnocení cenného papíru může být měřen jako rozdíl mezi očekávanou výnosností $\bar{r}_i$ a příslušnou rovnovážnou očekávanou výnosností $\bar{r}_i^e$, který udává alfa cenných papírů:

$$\alpha_i = \bar{r}_i - \bar{r}_i^e \quad (1.39)$$

$$\alpha_i = \bar{r}_i - r_f + (\bar{r}_M - r_f)\beta_i \quad (1.40)$$

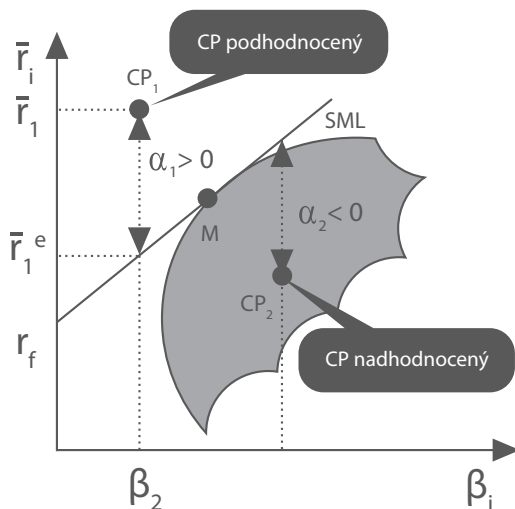
- je-li $\alpha_i > 0$, je podhodnocený cenný papír, leží nad SML a je výhodné jej nakupovat
- je-li $\alpha_i < 0$, je nadhodnocený cenný papír, leží pod SML a je výhodné jej prodávat
- je-li $\alpha_i = 0$, je správně ohodnocený, cenný papír leží na přímce SML

Poznámka. Je-li α_i nulové, je tento proces generující výnosnost identický s procesem v rovnici (1.26). Výsledkem jsou tedy shodné charakteristické přímky, které prochází počátkem. Je-li nenulové, budou mít obě charakteristické přímky shodné příslušné směrnice, neboť směrnice (tzn. beta) nejsou závislé na správném nebo nesprávném ohodnocení. Přímky tedy budou rovnoběžné, ale budou se lišit polohou jejich počátečního bodu.

Z rovnice (1.40) lze výnosy cenných papírů vyjádřit ve tvaru:

$$r_i = \alpha_i + \beta_i r_M + \varepsilon_i \quad \text{pro všechna } i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (1.41)$$

Výnos cenného papíru se skládá ze složky závislé a nezávislé na výnosu trhu. Koeficient číselně vyjadřuje citlivost cenného papíru na výnosu trhu (burzovní index).



Obrázek 1.7: Alfa cenného papíru.

Složky $\alpha_i + \varepsilon_i$ představují součást výnosu nezávislém na výnosu trhu.

Pro náhodnou chybu ε_i musí platit pro všechna $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_i) &= 0 \\ E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) &= 0 \\ E[\varepsilon_i(r_M - \bar{r}_M)] &= 0 \\ E(\varepsilon_i^2) &= \sigma_{\varepsilon_i}^2 \end{aligned}$$

Pak platí:

1. rozptyl cenného papíru i je:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 \quad (1.42)$$

2. kovariance dvou cenných papírů i, j je:

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_M^2 \quad (1.43)$$

Důkaz. {Rozptyl cenného papíru.}

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= E[r_i - E(r_i)]^2 = E[(\alpha_i + \beta_i r_M + \varepsilon_i) - E(\alpha_i) - \beta_i E(r_M) - E(\varepsilon_i)]^2 = \\ &= E[(\alpha_i + \beta_i r_M + \varepsilon_i) - \alpha_i - \beta_i \bar{r}_M]^2 = E[\beta_i(r_M - \bar{r}_M) + \varepsilon_i]^2 = \\ &= \beta_i^2 E(r_M - \bar{r}_M)^2 + 2\beta_i E[\varepsilon_i(r_M - \bar{r}_M)] + E(\varepsilon_i)^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 \end{aligned}$$

□

Důkaz. {Kovariance dvou cenných papírů i, j .}

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= E\{[r_i - E(r_i)] \cdot E[r_j - E(r_j)]\} \\
 &= E\{[(\alpha_i + \beta_i r_M + \varepsilon_i) - (\alpha_i + \beta_i \bar{r}_M)] \cdot E[(\alpha_j + \beta_j r_M + \varepsilon_j) - (\alpha_j + \beta_j \bar{r}_M)]\} \\
 &= E\{[\beta_i(r_M - \bar{r}_M) + \varepsilon_i][\beta_j(r_M - \bar{r}_M) + \varepsilon_j]\} \\
 &= \beta_i \beta_j E(r_M - \bar{r}_M)^2 + E(\varepsilon_i \varepsilon_j) \\
 &= \beta_i \beta_j \sigma_M^2
 \end{aligned}$$

□

Poznámka. Neboť σ_M je stejná bez ohledu na to, jakou akci zkoumáme, míra přírůpků cenného papíru k riziku velkého portfolia je β_i . Potom jak je vidět v rovnici č.(1.42) se efekt $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ v portfoliovém riziku může blížit k nule, když portfolio roste. Běžně se o $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ mluví jako o modifikovaném riziku. I přesto, že n roste, efekt $\beta_i^2 \sigma_M^2$ na portfoliovém riziku se nezmenšuje. Jelikož σ_M^2 je konstantní pro všechny cenné papíry, říkáme, že β_i je míra nemodifikovaného rizika cenného papíru. Neboť modifikované riziko může být eliminováno držením dost velkého portfolia, β_i se často používá jako míra rizika cenného papíru.

1.8 Určení optimálního portfolia

V první kapitole jsme si uvedli, že investorovo optimální portfolio je identifikováno bodem, kde se investorovy indiferenciální křivky dotýkají lineární (přímkové) efektivní množiny.

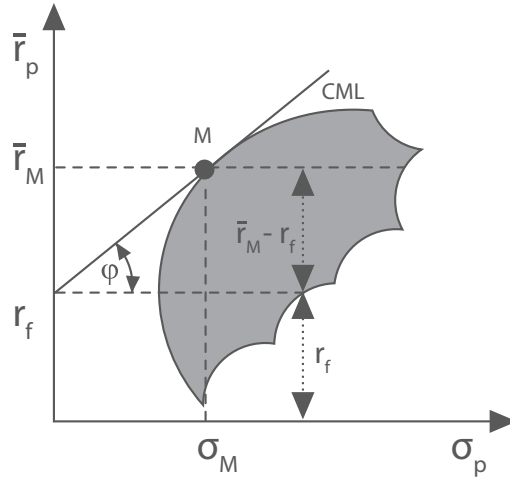
Máme rizikové portfolia A,B,C a T, všechny patří do efektivní množiny. Investor může prostředky částečně investovat do bezrizikového aktiva a část do portfolia s rizikovými cennými papíry. Portfolia, které vzniknou kombinací rizikových portfolií s bezrizikovým aktivem, budou ležet na polopřímkách, jak je vidět na obrázku 1.2. Každý investor dává přednost portfoliu ležícímu na polopřímce s počátkem v bezrizikové sazbě (r_f) a procházející tangenciálním (tržním) portfoliem před všemi portfolii s rizikovými cennými papíry.

Tangenciální portfolio T ztotožňované s tržním portfoliem M je bodem, kde se tato polopřímka dotýká zakřivené efektivní množiny. Polohu bodu dotyku $[\bar{r}_M, \sigma_M]$ neznáme, ale můžeme využít vlastnosti, že polopřímka tvořící lineární efektivní množinu má **největší sklon** a úhel z obrázku 1.8 lze jednoduše vyjádřit:

$$f(\bar{X}) = \operatorname{tg} \varphi = \frac{r_p - r_f}{\sigma_p} \quad (1.44)$$

Hledáme extrém funkce $f(\bar{X})$ omezeného podmínkou, že součet vah cenných papírů v portfoliu je roven jedné.

Neboť $\sum_{i=1}^n X_i = 1$ a $r_f = \text{konst.}$, funkci si vyjádříme ve tvaru:



Obrázek 1.8: Sklon lineární přímky efektivní množiny.

$$r_p - r_f = \sum_{i=1}^n X_i \bar{r}_i - \sum_{i=1}^n X_i r_f \quad (1.45)$$

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij}} \quad (1.46)$$

$$\tan \varphi = f(\bar{X}) = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i (\bar{r}_i - r_f)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij}}} \quad (1.47)$$

Extrém funkce získáme řešením následujících n rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{df(\bar{X})}{dX_1} &= 0 \\ \frac{df(\bar{X})}{dX_2} &= 0 \\ \frac{df(\bar{X})}{dX_3} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{df(\bar{X})}{dX_n} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{df(\bar{X})}{dX_i} = \frac{\frac{d(\bar{r}_p - r_f)}{dX_i} \sigma_p - \frac{d\sigma_p}{dX_i} (\bar{r}_p - r_f)}{\sigma_p^2} = 0$$

$$\frac{(\bar{r}_i - r_f) \sigma_p - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sigma_p} \cdot (2X_i \sigma_i^2 + 2 \sum_{j=1}^n X_j \sigma_{ji}) (\bar{r}_p - r_f)}{\sigma_p^2} = 0$$

$$\frac{1}{\sigma_p} (\bar{r}_i - r_f) - \frac{1}{\sigma_p} (\bar{r}_p - r_f) \cdot \frac{X_1 \sigma_{1i} + X_2 \sigma_{2i} + \dots + X_i \sigma_i^2 + \dots + X_n \sigma_{ni}}{\sigma_p^2} = 0$$

$$\frac{1}{\sigma_p} [(\bar{r}_i - r_f) - (\bar{r}_p - r_f) \cdot \frac{X_1 \sigma_{1i} + X_2 \sigma_{2i} + \dots + X_i \sigma_i^2 + \dots + X_n \sigma_{ni}}{\sigma_p^2}] = 0$$

Pro zjednodušení zavedeme substituci:

$$\lambda = \frac{(\bar{r}_p - r_f)}{\sigma_p^2} \quad (1.48)$$

$$\frac{1}{\sigma_p} [(\bar{r}_i - r_f) - (\lambda X_1 \sigma_{1i} + \lambda X_2 \sigma_{2i} + \dots + \lambda X_i \sigma_i^2 + \dots + \lambda X_{n-1} \sigma_{n-1,i} + \lambda X_n \sigma_{ni})] = 0$$

Neboť $\frac{1}{\sigma_p} \neq 0$, budeme řešit pouze rovnici:

$$\bar{r}_i - r_f - (\lambda X_1 \sigma_{1i} + \lambda X_2 \sigma_{2i} + \dots + \lambda X_i \sigma_i^2 + \dots + \lambda X_{n-1} \sigma_{n-1,i} + \lambda X_n \sigma_{ni}) = 0$$

Násobky podílů cenných papírů investovaných do portfolia pro $i = 1, 2, \dots, n$ zapíšeme výrazem:

$$Z_i = \lambda X_i \quad (1.49)$$

$$\bar{r}_i - r_f = Z_1 \sigma_{1i} + Z_2 \sigma_{2i} + \dots + Z_i \sigma_i^2 + \dots + Z_n \sigma_{n-1,i} + Z_n \sigma_{ni} = 0 \quad (1.50)$$

$$\bar{r}_i - r_f = Z_i \sigma_i^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^n Z_j \sigma_{i,j} \quad (1.51)$$

$$\begin{aligned}
\bar{r}_1 - r_f &= Z_1\sigma_1^2 + Z_2\sigma_{21} + Z_3\sigma_{31}^2 + \dots + Z_n\sigma_{n1} = 0 \\
\bar{r}_2 - r_f &= Z_1\sigma_{12} + Z_2\sigma_2^2 + Z_3\sigma_{32} + \dots + Z_n\sigma_{n2} = 0 \\
\bar{r}_3 - r_f &= Z_1\sigma_{13} + Z_2\sigma_{23} + Z_3\sigma_3^2 + \dots + Z_n\sigma_{n3} = 0 \\
&\vdots \\
\bar{r}_n - r_f &= Z_1\sigma_{1n} + Z_2\sigma_{2n} + Z_3\sigma_{3n}^2 + \dots + Z_n\sigma_n^2 = 0
\end{aligned}$$

Můžeme si všimnout, že neznámé proměnné $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ jsou násobené rozptyly jednotlivých cenných papírů a kovariancemi mezi nimi.

Do rovnice (1.50) dosadíme σ_i^2 a σ_{ij} , viz rovnice (1.42), (1.43), pro $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
\bar{r}_i - r_f &= Z_i(\beta_i^2\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2) + \sum_{j=1, j \neq i}^n Z_j\beta_i\beta_j\sigma_M^2 \\
&= Z_i\sigma_{\varepsilon_i}^2 + \beta_i^2\sigma_M^2 \sum_{j=1}^n Z_j\beta_j
\end{aligned}$$

Po vydělení výrazem $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ získáme:

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{r}_i - r_f}{\sigma_{\varepsilon_i}^2} &= Z_i + \frac{\beta_i\sigma_M^2}{\sigma_{\varepsilon_i}^2} \cdot \sum_{j=1}^n Z_j\beta_j \\
Z_i &= \frac{\bar{r}_i - r_f}{\sigma_{\varepsilon_i}^2} - \frac{\beta_i\sigma_M^2}{\sigma_{\varepsilon_i}^2} \cdot \sum_{j=1}^n Z_j\beta_j = \frac{\beta_i}{\sigma_{\varepsilon_i}^2} \left(\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i} - \sigma_M^2 \cdot \sum_{j=1}^n Z_j\beta_j \right) \quad (1.52)
\end{aligned}$$

Zavedeme konstantu C^* , pak:

$$Z_i = \frac{\beta_i}{\sigma_{\varepsilon_i}^2} \left(\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i} - C^* \right) \quad (1.53)$$

C^* vybíráme z množiny čísel C_i a výběr je ovlivněn podmínkou, zda je **sell short zakázán** nebo **povoleno**.

Odvodíme si vzorec na výpočet hodnot C_i . Nejdříve si vyjádříme hodnotu součtu $\sum_{j=1}^n Z_j\beta_j$. Získáme ji, pokud rovnici (1.52) převedeme na tvar pro $j = 1, 2, \dots, n$ a vynásobíme celou rovnici výrazem $\sum_{j=1}^n \beta_j$:

$$Z_j = \frac{\bar{r}_j - r_f}{\sigma_{\varepsilon_j}^2} - \frac{\beta_j\sigma_M^2}{\sigma_{\varepsilon_j}^2} \cdot \sum_{j=1}^n Z_j\beta_j$$

$$\sum_{j=1}^n Z_j \beta_j = \sum_{j=1}^n \beta_j \frac{\bar{r}_j - r_f}{\sigma_{\varepsilon_j}^2} - \sigma_M^2 \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j^2}{\sigma_{\varepsilon_j}^2} \cdot \sum_{j=1}^n Z_j \beta_j$$

$$\sum_{j=1}^n Z_j \beta_j + \sigma_M^2 \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j^2}{\sigma_{\varepsilon_j}^2} \cdot \sum_{j=1}^n Z_j \beta_j = \sum_{j=1}^n \beta_j \frac{\bar{r}_j - r_f}{\sigma_{\varepsilon_j}^2}$$

$$\sum_{j=1}^n Z_j \beta_j \cdot (1 + \sigma_M^2 \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j^2}{\sigma_{\varepsilon_j}^2}) = \sum_{j=1}^n \beta_j \frac{\bar{r}_j - r_f}{\sigma_{\varepsilon_j}^2}$$

$$\sum_{j=1}^n Z_j \beta_j = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\bar{r}_j - r_f}{\sigma_{\varepsilon_j}^2} \beta_j}{1 + \sigma_M^2 \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j^2}{\sigma_{\varepsilon_j}^2}}$$

Vypočítaný výraz dosadíme do rovnice (1.53):

$$C_i = \frac{\sigma_M^2 \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\bar{r}_j - r_f}{\sigma_{\varepsilon_j}^2} \beta_j}{1 + \sigma_M^2 \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j^2}{\sigma_{\varepsilon_j}^2}} \quad (1.54)$$

Výpočet vah v portfoliu, kdy sell short je zakázán (nebo-li Sales short, prodej nakrátko)

Cenné papíry seřadíme sestupně podle velikosti podílů $\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}$ a ze vztahu (1.55) postupně vypočítáme hodnoty $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$:

$$C_1 = \frac{\sigma_M^2 \cdot \frac{\bar{r}_1 - r_f}{\sigma_{\varepsilon_1}^2} \beta_1}{1 + \sigma_M^2 \frac{\beta_1^2}{\sigma_{\varepsilon_1}^2}}$$

$$C_2 = \frac{\sigma_M^2 \cdot [\frac{\bar{r}_1 - r_f}{\sigma_{\varepsilon_1}^2} \beta_1 + \frac{\bar{r}_2 - r_f}{\sigma_{\varepsilon_2}^2} \beta_2]}{1 + \sigma_M^2 (\frac{\beta_1^2}{\sigma_{\varepsilon_1}^2} + \frac{\beta_2^2}{\sigma_{\varepsilon_2}^2})}$$

$$C_3 = \frac{\sigma_M^2 \cdot [\frac{\bar{r}_1 - r_f}{\sigma_{\varepsilon_1}^2} \beta_1 + \frac{\bar{r}_2 - r_f}{\sigma_{\varepsilon_2}^2} \beta_2 + \frac{\bar{r}_3 - r_f}{\sigma_{\varepsilon_3}^2} \beta_3]}{1 + \sigma_M^2 (\frac{\beta_1^2}{\sigma_{\varepsilon_1}^2} + \frac{\beta_2^2}{\sigma_{\varepsilon_2}^2} + \frac{\beta_3^2}{\sigma_{\varepsilon_3}^2})}$$

⋮

$$C_n = \frac{\sigma_M^2 \cdot [\frac{\bar{r}_1 - r_f}{\sigma_{\varepsilon_1}^2} \beta_1 + \frac{\bar{r}_2 - r_f}{\sigma_{\varepsilon_2}^2} \beta_2 + \frac{\bar{r}_3 - r_f}{\sigma_{\varepsilon_3}^2} \beta_3 + \dots + \frac{\bar{r}_n - r_f}{\sigma_{\varepsilon_n}^2} \beta_n]}{1 + \sigma_M^2 (\frac{\beta_1^2}{\sigma_{\varepsilon_1}^2} + \frac{\beta_2^2}{\sigma_{\varepsilon_2}^2} + \frac{\beta_3^2}{\sigma_{\varepsilon_3}^2} + \dots + \frac{\beta_n^2}{\sigma_{\varepsilon_n}^2})}$$

Aby váhy v portfoliu byly kladné, tedy $Z_i > 0$, vybereme z těchto hodnot všechna $C_k < \frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}$, kde $k \in i$, C^* **označíme poslední takové číslo**, $C_k = C^*$.

$$Z_i = \frac{\beta_i}{\sigma_{\varepsilon_i}^2} \left(\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i} - C^* \right) \quad \text{pro všechna } i \in \{1, 2, \dots, k\}$$

$$Z_1 = \frac{\beta_1}{\sigma_{\varepsilon_1}^2} \left(\frac{\bar{r}_1 - r_f}{\beta_1} - C^* \right)$$

$$Z_2 = \frac{\beta_2}{\sigma_{\varepsilon_2}^2} \left(\frac{\bar{r}_2 - r_f}{\beta_2} - C^* \right)$$

$$Z_3 = \frac{\beta_3}{\sigma_{\varepsilon_3}^2} \left(\frac{\bar{r}_3 - r_f}{\beta_3} - C^* \right)$$

$$\vdots$$

$$Z_k = \frac{\beta_k}{\sigma_{\varepsilon_k}^2} \left(\frac{\bar{r}_k - r_f}{\beta_k} - C^* \right)$$

Nyní už můžeme z vypočítaných hodnot proměnných $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_k$ vypočítat váhy v portfoliu X_i , z rovnice (1.49), pro všechny $i = 1, 2, 3, \dots, k$:
Neboť $\sum_{i=1}^k = 1$, pak z rovnice (1.49) vyplývá, že $\sum_{i=1}^k Z_i = \sum_{i=1}^k X_i \lambda = \lambda$:

$$X_i = \frac{Z_i}{\lambda} = \frac{Z_i}{\sum_{i=1}^k Z_i}$$

$$X_1 = \frac{Z_1}{\lambda} = \frac{Z_1}{\sum_{i=1}^k Z_i}, X_2 = \frac{Z_2}{\lambda} = \frac{Z_2}{\sum_{i=1}^k Z_i}, \dots, X_i = \frac{Z_i}{\lambda} = \frac{Z_i}{\sum_{i=1}^k Z_i} \quad (1.55)$$

Výpočet vah v portfoliu, kdy sell short je povolen (nebo-li Sales short, prodej nakrátko)

Jediným rozdílem je, že se budou zařazovat všechny cenné papíry do portfolia a $C_n = C^*$, tedy za C^* budeme dosazovat hodnotu cenného papíru s **nejmenším podílem** $\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}$. Další postup je stejný jako u výpočtu vah v portfoliu, kdy je sell short zakázán.

1.9 Odhadnutí bety

Odhady se vykonávají na modelech, které konstruujeme na základě předpokladu, že jevy probíhající v ekonomice se navzájem ovlivňují buďto přímo, nebo nepřímo prostřednictvím třetího jevu. Aby jsme měli východiska pro tvorbu předpovědí, využíváme údaje o minulém (historickém) vývoji zkoumaných proměnných a zároveň předpokládáme, že tyto vztahy a vývoj proměnných v budoucnu budou přetrvávat stejným směrem. Tyto předpoklady a vztahy fixujeme do modelu a výsledkem je podmíněná prognóza, tedy že dojde k očekávaným změnám v parametrech modelu. Nyní se budeme zabývat technikami pro odhadnutí bet, které zvyšují kvalitu informací vyjmutých z historických bet a usilují tak o nejlepší odhady.⁹

1.9.1 Nepřizpůsobené bety

Kovarianční měření bety

Beta akcie i , označená β_i , je vypočítána jako:

$$\beta_i = \frac{Cov(r_i, r_m)}{\sigma_m^2} \quad (1.56)$$

r_m	návratnost trhu jako celku
$Cov(r_i, r_m)$	kovariance mezi návratnostmi akcie i a návratností trhu
σ_m^2	rozptyl tržní návratnosti

Metoda nejmenších čtverců OLS

Beta může být také vypočítána jako sklon regresní přímky. Použitím tržního modelu pro každou společnost může být beta odhadnuta užitím metody OLS (Ordinary Least Squares):

$$r_{it} = \alpha_i + \beta_i r_{mt} + \varepsilon_i \quad (1.57)$$

β_i	odhad bety pro společnost i
r_{it}	nadměrný výnos (návratnost) akcie i (o kolik převýší výnos i -tého aktiva výnos bezrizikového aktiva)
r_{mt}	návratnost trhu

Hodnoty α_i , β_i a $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ nemusí být v čase konzistentní, a proto tyto hodnoty nemůžeme přesně určit, ale můžeme z historických dat určit návratnost cenného papíru a trhu.

⁹Alexander Gordon J., Chervany L., Norman.: On the Estimation and Stability of Beta, str. 123 – 137, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1980

Kdyby byla $\sigma_{\varepsilon_i}^2 = 0$, pak je tato rovnice (1.58) rovnicí přímky a lze jednoduchým způsobem dvěma pozorováními určit hodnoty α_i a β_i . Přítomná náhodná chyba ε_i ale způsobí, že skutečná návratnost vytvoří mnoho bodů kolem této přímky.

Na vertikální ose y měříme návratnost cenného papíru a na horizontální ose x měříme návratnost trhu a každý bod v diagramu je návratnost akcie i v daném časovém intervalu, jak je názorně ukázáno na obrázku 1.9. Skutečné pozorování návratnosti leží na a okolo skutečného vztahu (přímky). Pro odhad polohy přímky obvykle uplatníme regresní analýzu.

Pokud vyneseme na osy hodnoty r_{it} a r_{Mt} , kde např. $t = 1$ měsíc, tak poté každý bod bude reprezentovat návratnost dané akcie a trhu během jednoho měsíce. Dodatečné body získáme vynesením návratnosti následujících měsíců. Pak můžeme umístit přímku a to tak, aby minimalizovala součet čtverců odchylek z přímky ve vertikálním směru. Nejlepší odhad β_i v rámci daného období je pak sklon této přímky.

Jak již bylo řečeno, metoda nejmenších čtverců spočívá ve vhodném lineárním vztahu mezi mírou odhadované návratnosti a mírou návratnosti tržního indexu tak, že suma čtverečných diferenciací mezi odhadovanou aktuální návratností a těmito imlikovanými vztahy je minimalizována.

Jestliže označíme y_t a x_t pro všechna $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ jako řady míry odhadované návratnosti akcie a tržního indexu, pak v jednoduchém lineárním regresním procesu:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t \quad \text{pro všechna } t \in \{1, 2, \dots, T\}, \quad (1.58)$$

vypočítáme odhady parametrů β, α, σ^2 následovně:

$$b = \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x})}{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2} \quad (1.59)$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (1.60)$$

$$s^2 = \frac{1}{T-2} \sum_{t=1}^T (y_t - a - bx_t)^2 \quad (1.61)$$

$\bar{y}$ aritmetický průměr veličin y_t

$\bar{x}$ aritmetický průměr veličin x_t

Standartní odchylku odhadu bety a alfy vyjádříme vzorci:

$$s_b = \frac{s}{\sqrt{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2}} \quad (1.62)$$

$$s_a = s \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{\bar{x}^2}{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2}} \quad (1.63)$$

Pro platnost těchto výpočtů musí být splněna podmínka, kde symbol ε představuje náhodnou proměnnou:

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t) &= 0 \\ E(\varepsilon_t, \varepsilon_s) &= 0 \quad \text{pro všechna } t \neq s \\ E(\varepsilon_t^2) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

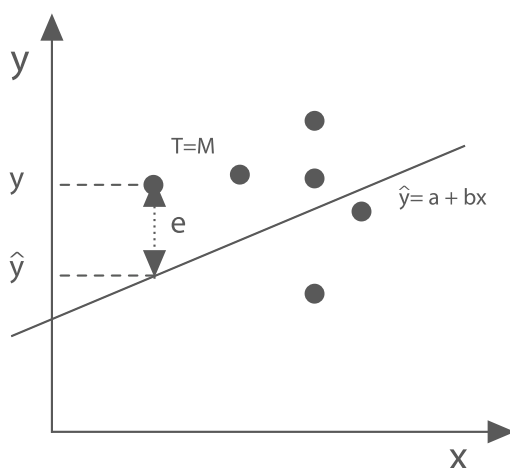
Důkaz. {Odhad parametrů}

Metodou nejmenších čtverců OLS hledáme takové parametry modelu, které mají minimální reziduální součet čtverců (druhých mocnin) odchylek a díky tomu se odhady parametrů nejvíce blíží ke skutečným hodnotám:

$$S^2 = \sum e^2 = \sum (y - \hat{y})^2 \rightarrow \min$$

y	skutečné naměřené hodnoty
$\hat{y}$	hodnoty vyrovnané modelem

Schématické znázornění je na obrázku 1.9, body znázorňují skutečné naměřené hodnoty a přímka vyrovnaný lineární trend (odhad modelu). Odhad se může od skutečných hodnot výrazně lišit, způsobit to může malý počet pozorování, nebo významně velké náhodné složky.



Obrázek 1.9: Možná chyba v odhadu parametrů metodou OLS.

1. Odhad parametru alfa:

$$\frac{d \sum_{t=1}^T (y_t - a - bx_t)^2}{da} = 0$$

Po parcionálním derivování získáme:

$$-2 \sum_{t=1}^T (y_t - a - bx_t) = 0$$

$$\sum_{t=1}^T y_t = Ta + b \sum_{t=1}^T x_t$$

$$a = \frac{\sum_{t=1}^T y_t - b \sum_{t=1}^T x_t}{T} = \bar{y} - b\bar{x}$$

2. Odhad parametru beta:

$$\frac{d \sum_{t=1}^T (y_t - a - bx_t)^2}{db} = 0$$

Po parcionálním derivování získáme:

$$-2 \sum_{t=1}^T x_t (y_t - a - bx_t) = 0$$

$$\sum_{t=1}^T x_t y_t = a \sum_{t=1}^T x_t + b \sum_{t=1}^T x_t^2$$

Když dosadíme za odhad a dle rovnice č.1.61, dostaneme:

$$\sum_{t=1}^T x_t y_t = \frac{\sum_{t=1}^T y_t - b \sum_{t=1}^T x_t}{T} \sum_{t=1}^T x_t + b \sum_{t=1}^T x_t^2 = \bar{x} \sum_{t=1}^T y_t - \bar{x}b \sum_{t=1}^T x_t + b \sum_{t=1}^T x_t^2$$

$$\sum_{t=1}^T x_t y_t - \bar{x} \sum_{t=1}^T y_t = b \sum_{t=1}^T x_t^2 - b\bar{x} \sum_{t=1}^T x_t$$

$$b = \frac{\sum_{t=1}^T x_t y_t - \bar{x} \sum_{t=1}^T y_t}{\sum_{t=1}^T x_t^2 - \bar{x} \sum_{t=1}^T x_t} = \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x})}{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2}$$

□

Jedná se o nejlepší nestranné odhady parametrů ve smyslu, že očekávaná hodnota každého odhadu se rovná odpovídajícímu parametru $E(b|\beta) = \beta$ a očekávaná chyba kvadratické rovnice dosáhne minimální hodnoty. Pro tyto důvody, jsou procedury teorie výběrů odhadů obvykle aplikovány k odhadu bety a spolehlivosti.

Tyto hodnoty a, b jsou jen odhady skutečných α, β , které pro akcii existují. Odhady mohou podléhat chybě a kromě toho také nejsou hodnoty v čase konstantní.

Rovnice $E(b|\beta) = \beta$ popisuje aspekt rozdělení odhadu domnívající se, že je dána pravdivá hodnota parametrů. Aktuální situace je právě opačná: je to namátkový koeficient, který je znám a na základě této (a nějaké apriorní nebo dodatkové) informace my chceme odvodit rozdělení parametru.

Příklad 1.1. K ilustraci tohotu poukázání předpokládáme, že odhad bety akcie obchodovatelné na New Yorkské akciové burze je $b = 0.2$. Při absenci dodatečné informace je při teorii výběrů tato hodnota nelepším odhadem skutečné bety, protože žádná určená beta není pravděpodobně nadhodnocena stejně jako podhodnocena při vzorovém b . Tohle nicméně neimplikuje, že je dán vzorový odhad b , skutečný parametr se rovná pravděpodobně hodnotě pod nebo nad hodnotou $b = 0.2$. Ve skutečnosti je známo z předchozího měření, že bety akcií obchodovatelných na Neworské burze jsou koncentrovány kolem jedničky, většinou je rozsah hodnoty mezi $b = 0.5$ a $b = 1.5$. Tedy pozorované beta nižší než $b = 0.2$ je spíše výsledkem podhodnocení než nadhodnocení. Otázka, který odhad b leží spíše pod nebo nad skutečnou betou je irelevantní, protože skutečná beta není známa. Co se požaduje je odhad takový, že jsou dány vzorové informace (které jsou dostupné), skutečná beta bude pravděpodobně ležet pod nebo nad ní.

Pokračováním tohoto příkladu dále, předpokládáme, že uvažujeme 1000 akcií, bety, které uvažujeme, jsou přibližně normálně rozděleny okolo 1.0 se standartní odchylkou $b = 0.5$. Každá z těchto skutečných bet je podhodnocována nebo nadhodnocována od b . Proto je zde 500 akcií se skutečnou betou vyšší, než je sledovaný odhad a 500 akcií se skutečnou betou nižší než odhad. Jestliže je sledovaný odhad $b = 0.2$, akcie by nebyla žádná z přibližně $500 \times 0.945 = 473$ akcií s betou větší než 0.2 a podhodnocenou, nebo žádná z přibližně $500 \times 0.055 = 27$ akcií s betou menší než 0.2 a nadhodnocenou. Zřejmě výběry a naše dřívější znalosti rozdělení bety tvoří mnohem přívětivější model, tedy není korektní brát 0.2 pro objektivní odhad.

Verifikace jednoduchého regresního modelu

10

1. Významnost modelu

¹⁰Kvasnička M., Vašíček O.: Úvod do analýzy časových řad, str. 38-46, Masarykova univerzita, 2001.

Statistickou významnost ověřujeme koeficientem determinace R^2 , který má tvar:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - a - bx_t)^2}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}_t)^2} \quad (1.64)$$

Hodnota koeficientu determinace se pohybuje v rozmezí $0 \leq R^2 \leq 1$ a vyjadřuje, jak velká část empirických hodnot je vysvětlena modelem. Statistickou významnost koeficientu determinace potvrdíme F-statistikou, jenž má tvar:

$$F_r = \frac{\frac{R^2}{k}}{\frac{(1-R^2)}{n-(k+1)}} \quad (1.65)$$

Jestliže je hodnota F_r větší jako hodnota z tabulek při zvolené hladině významnosti¹¹ a při stupních volnosti k a $[n - (k + 1)]$ ¹², tedy:

$$F_r > F_{1-\alpha; k; [n-(k+1)]}, \quad (1.66)$$

můžeme zamítnout nulovou hypotézu o statistické nevýznamnosti koeficientu determinace a díky tomu je statisticky významný jak koeficient determinace, tak i celý model.

2. Testování statistické významnosti parametrů

Provádíme za použití Studentovy t-statistiky. Pro parametr b charakterizujeme statistiku:

$$t = \frac{|b|}{s_b} \quad (1.67)$$

a pro parametr a charakterizujeme statistiku:

$$t = \frac{|a|}{s_a} \quad (1.68)$$

Jestliže je hodnota t větší jako tabulková hodnota t-statistiky pro zvolenou hladinu významnosti a stupních volnosti k a $[n - (k + 1)]$, tedy:

$$|t| > t_{\alpha; [n-(k+1)]}, \quad (1.69)$$

¹¹Obvykle se používá hodnota hladiny významnosti 0,05 nebo 0,01 (tzv. 5% nebo 1% hladina významnosti), nastavení těchto hodnot zachycuje nízkou pravděpodobnost nulové skutečné hodnoty testovaného koeficientu.

¹²Pro jednoduché vyhlazování křivky, kterou získáme za pomoci lineární regrese dosazujeme za počet stupňů volnosti $k = 1$

tak zamítneme nulovou hypotézu o statistické nevýznamnosti a řekneme, že parametr b je statisticky významný a má smysl ho použít k výpočtu jednotlivých hodnot.

3. Test předpokladů metody OLS

Pro spolehlivé odhady je také nutné testovat dodržení předpokladů metody nejmenších čtverců.

- **Normální (Gaussovo) rozdělení náhodných složek**

Nejjednodušším způsobem pro zjištění této podmínky je pohled na histogram reziduí (nejznámější typ grafického znázornění rozdělení četností jedné proměnné), který by měl mít přibližně tvar funkce hustoty Gaussova rozdělení. Normální rozdělení je dáno hustotou:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1.70)$$

O Gassově rozdělení mluvíme, pokud $\mu = 0$ a $\sigma = 1$.

- **Autokorelace náhodných složek**

Pro spolehlivost lineárního regresního modelu je důležité dále ověřit, zda byl dodržen předpoklad modelu, že jsou nezávislé náhodné veličiny. Jejich nezávislost může být oslabena například tím, že náhodnou veličinu ovlivňují systematické faktory, proměnlivost parametrů v čase, nevyhovující model, malý počet pozorování apod. Autokorelace nám neovlivní hodnotu odhadu parametrů, ale může nám významně zkreslit jejich směrodatnou odchylku, což ovlivní statistickou významnost naměřených odhadů. Pro zjištění nezávislosti nám postačí zjistit korelační koeficient dvou náhodných složek s normálním rozložením.

Koeficient autokorelace $r \in \langle -1, 1 \rangle$ mezi složkami e_t a e_{t-1} je:

$$r = \frac{\sum_{t=2}^T e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^T e_t^2} \quad (1.71)$$

Jeho statistickou významnost pak musíme testovat Durbin-Watsonovým testem:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^T (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T e_t^2} \quad (1.72)$$

Pokud:

- $d = 0$ úplná pozitivní autokorelace
- $d = 2$ absence autokorelace
- $d = 4$ úplná negativní autokorelace

• Heteroskedasticita

Jestliže rozptýl náhodné veličiny není konstantní, jedná se o heteroskedasticitu, která ovlivňuje směrodatné odchylky parametrů a tak statistickou významnost jejich odhadu.

Heteroskedasticitu testujeme Goldfeld-Quandtovým testem. Rezidua e rozdělíme na horní a dolní část tak, aby obě obsahovaly sudý počet členů (můžeme vynechat pár středních hodnot M). Poté sečteme čtverce reziduí obou těchto dvou částí (součet druhých mocnin) a vyšlé hodnoty S_1 a S_2 porovnáme s Fisherovým rozdělením v následujícím poměru:

$$F_{2,1} = \frac{S_2}{S_1} > 1 \quad (1.73)$$

Rezidua považujeme za heteroskedastická, pokud:

$$F_{2,1} > F_{\nu,\nu}(\alpha) \quad (1.74)$$

pro $\nu = (n - M)/2 - (k + 1)$.

1.9.2 Stabilita koeficientu β v čase

Nyní si podrobně rozebereme faktory, které podle nejrozumnějších studií mají vliv na stabilitu bety v čase.

1. Stabilita ovlivněna počtem cenných papírů v portfoliu

- Jako první testovali vztahy mezi betami v čase t Blume (1971) a Levy. Blume¹³ test stability bety aplikoval na měsíčních datech, období 1926 – 1968 rozdělil na šest nepřesahujících se period sedmiletých období. Poté odhadnul všechny koeficienty beta pro první periodu, vzestupně je seřadil podle velikosti a vytvořil portfolio z n koeficientů beta pro ($n = 1, 2, 4, 7, 10, 35, 50, 75, 100$). Pro každé toto portfolio odhadl bety ve všech dalších periodách a poté vyzkoušel, jak vysoce korelované byly bety z jednoho a druhého portfolia. Došel k závěru, že bety jsou stabilní pro portfolia s vysokým počtem cenných papírů, ale pro jednotlivé cenné papíry stabilní nejsou. Čím větší portfolia máme, tím bety obsahují více informací o budoucích betách akcií.

¹³Blume, Marshall -On the assessment of risk, Journal of Finance 6, 1971, str. 1-10

Důvodem, proč se odhady bet liší ve dvou různých obdobích může být zdůvodněno jednak možností změny rizika cenného papíru nebo portfolia, nebo také tím, že beta je měřena v každém období s náhodnou chybou a čím větší je náhodná chyba, tím je menší předpovědní síla bety z jednoho období do druhého. Změny bet se budou lišit mezi jednotlivými cennými papíry a tyto změny se budou v portfoliu vyvažovat. Chyby v odhadnutých betách u jednotlivých cenných papírů budou mít tendenci se vyvažovat, když jsou kombinované, a proto bude méně chyb u měření bet u portfolia. Historické bety u portfolia jsou tedy lepší indicie budoucnosti než u cenných papírů.

- Levy¹⁴ postupoval podobně jako Blume, ale pro test stability bety použil týdenní data z období 1960 – 1970. Dospěl také k závěru, že čím je více cenných papírů v portfoliu, tím je stabilita bety větší. Také Levy tvrdil, že stabilita bety je ovlivněna délkou vybraného časového intervalu.

2. Stabilita ovlivněna délkou vybraného časového intervalu

- Alexander a Chervany¹⁵ pro zajištění nejvyšší stability označili jako optimální rozmezí 4 až 6 let.
- Theobald¹⁶ pro odhadování bety použil data Velké Británie (1963 – 1972) a vzájemně porovnával korelační koeficienty v sousedních periodách. Dospěl k závěru, že nejstabilnější je beta v intervalu 15 až 17,5 let.

3. Citlivost na firemní velikost

- Mnoho studií ukázalo, že menší firmy získávají v průměru větší návratnost, než implikuje jejich beta (Tinic West(1984), Gilmer (1988)).
- Handa, Kothari a Wasley¹⁷ ukázali, že efekt velikosti firmy je citlivý na interval měření návratnosti, na kterém aplikujeme odhad bety. Odhadli ve své studii tržní model bet na základě návratností tržní hodnoty portfolia, které měřili v osmi intervalech - jednodenní, jednotydenní, jednoměsíční, dvouměsíční, čtvrtletní, čtyřměsíční, šestměsíční a roční. Výsledkem bylo, že se beta mění se změnou intervalu návratnosti. Návratnost akcie je korelována s návratnostní trhu a odchylky tržních návratností se mohou proporcionálně měnit se změnou intervalů. Zjistili, že bety vy-

¹⁴Levy, R. On the Short-term Stationarity of Beta Coefficients. Financial Analysts Journal, 1971, vol. 27, s. 55-62.

¹⁵Alexander, J., Gordon - Chervany, L., Norman. On the Estimation and Stability of Beta. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1980, vol. 15, no. 1, s. 123-137.

¹⁶Theobald, Michael. Beta Stationarity and Estimation Period: Some Analytical Results. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1981, vol. 16, no. 5, s. 747-757.

¹⁷Handa P., Kothari S.P., Wasley C.: The relation between the return interval and betas: Implications for the size effect, str.1123 – 1128., Journal of Finance 30, 1989

soko rizikových akcií se zvětšují s intervalem návratnosti, zatímco nízko rizikové bety se zmenšují s intervalem návratnosti.

- Konkurenčním vysvětlením těchto změn v betě s intervalem je, že standardní odchylka odhadů bety roste, jestliže je interval prodloužen. Důsledkem je, že odhad bety v dlouhém intervalu návratnosti je méně statisticky přesný a není tak dobře schopen vysvětlit odchylku návratností. Tuhle teorii Handa, Kothari a Wasley chtěli vyvrátit, proto provedli regresi měsíční a roční bety. Dokázali použitím metody OLS i GLS (zobecněná metoda nejmenších čtverců), že změny v betě nejsou primárně způsobeny změnami standardních odchylek.
- Handa, Kothari a Wasley také dále studovali na měsíčních a ročních datech důsledky změn bety kvůli efektu velikosti. Došli k závěru, že pouze roční bety vysvětlují přírůstky odchylky variací. Koeficient firemní velikosti byl zjištěn jako nekonzistentní s hypotézou efektu velikosti.
- Navzdory tomuto zjištění, Draper a Paudyal (1995) navrhli, že zvětšování velikostí návratností přináší výhody a doporučili 400 a více pozorování. Také navzdory dřívějším zjištěním, doporučili denní pozorování ve výpočtech bety. Dokumentovali rozdílnosti v odhadech bety, které nastávají v různých dnech v týdnu a v měsíci. Odhady odvozené z týdenních návratností byly vypočítány v pondělí nebo na konci měsíce a byly významně rozlišené v odvozeních z jiných dnů v týdnu nebo vybráním dnů měsíce a mohli tak doporučit použít úterní až čtvrteční návratnosti.
- Také Fabozzi a Francis ¹⁸ dokumentovali, že koeficient beta se pohybuje náhodně v čase spíše než že by zůstával stabilní jak metoda OLS předpokládá. Diebold, Im a Lee (1988) ukázali, že OLS odhad tržního modelu může mít v odhadu beta znatelně jiné výsledky, pokud použijeme ARCH test (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity).

Nutno ovšem dodat, že na problém se stabilitou bety v čase bylo často poukazováno, ale žádný z jeho kritiků nepřišel s postupem, jak tento problém vyřešit.

1.9.3 Přizpůsobené odhady bet

Odhadnuté bety mohou být stejné, nad skutečnou betou díky pozitivní chybě, nebo pod skutečnou hodnotou bety kvůli negativní chybě. Tedy odhadnutá beta pro každý cenný papír bude funkcí skutečné bety a chyby. Větší (menší) odhady bet by měly být následovány nižšími (vyššími) odhady. Blume i Levy dokumentují tendenci bet v následujících periodách inklinovat k jedné. Nejvíce používané přístupy na vyrovnaní této tendence jsou Blumeho technika a Vašíčkův-Bayesianův model.

¹⁸Fabozzi F. J., Francis J.C.: Beta as a random coefficient, str.101 – 115, Journal of Finance and quantitative analysis, 1978

Blumeho technika

Blume¹⁹ (1971) empiricky zkoumal stabilitu bety a dokumentoval tendenci bety navracet se k průměrné betě (1.0) v čase. Blume (1975) navrhl přizpůsobovací techniku ke zmírnění této empirické zákonitosti, jejíž pomocí bety vypočítané z minulé periody t se navracejí k betám vypočítaným z předešlé periody $t - 1$.

Blume postupoval tak, že vypočítal bety pro všechny akcie v období 1948 – 1954, pak mohl vypočítat bety pro ty samé akcie v období 1955 – 1961. Regresí vrátil bety akcií z pozdějšího období proti betám z dřívějšího období do původního stavu a následováním tohoto postupu získal přímku, jenž měří tendenci předpověděných bet být blíže ke stejné hodnotě než odhady z historických dat. Když to Blume udělal, získal:

$$\beta_{\text{Roky od 1 do 7}} = 0,343 + 0,667(\beta_{\text{Roky od -1 do -7}}) \quad (1.75)$$

Blume navrhl přizpůsobování bet v dalších letech následovně: například jestliže $\beta = 0,5$, pak naše předpověď bude $0,343 + 0,667 \cdot (0,5) = 0,682$.

Tato rovnice snižuje vyšší hodnoty bet a zvyšuje ty nižší. Další důležitou charakteristikou této rovnice je, že modifikuje průměrnou úroveň bet pro celkový počet akcií. Měří vztah mezi betami přes dvě období, znamená to, že jestliže průměrná beta se v těchto dvou období zvyšuje, předpokládá to, že průměrná beta poroste i v dalších období. Problematické je to v tom, že nemáme důvod proč věřit, že bude beta setrvávat se stejnými změnami v řízení. V tomto případě můžou být předpovědi zlepšeny vyrovnaním průměrné bety s historickým průměrem.

Blume zjistil, že přizpůsobené bety mají menší průměr čtvercových chyb předpovědi než nepřizpůsobené odhady.

Příklad 1.2. Když budeme chtít přizpůsobit předpovědi, pak když průměrná beta v období 1948 – 1954 byla 1.00 a průměrná beta v období 1955 – 1961 byla 1.02, pak předpovědní beta v období 1962 – 1968 je 1.033 (jednoduše dosadíme hodnotu 1.02 do pravé strany rovnice č.1.75). Tedy růstový trend bet z dřívějšího období pokračuje i do dalšího období. Pokud tomuto růstovému trendu u bet nevěříme, pak předpověď můžeme upravit tak, že mají stejnou střední hodnotu jako je historická střední hodnota. Prakticky to uděláme tak, že odečteme konstantu od všech bet po upravení směrem ke střední hodnotě (v našem případě odečteme konstantu 1.033 od každé předpovědní bety a přidáme 1.02).

¹⁹Blume, Marshall -On the short term stationary of beta coefficient, Financial Analysis Journal 27(5),1971,str.55-62

Vašíčkova technika

Vašíček ²⁰ navrhl metodu přizpůsobování bet k průměrné betě použitím váženého průměru průměrné bety a historické bety. Navrhl váhy pro každý odhad bet akcií závislých na:

- odchylce rozdělení historických odhadů bety akcií
- odchylce odhadu bety akcie i

Vašíček navrhl váhy:

$$\frac{\sigma_{\beta_1}^2}{\sigma_{\beta_1}^2 + \sigma_{\beta_{i1}}^2} \quad \text{pro všechna } \beta_{i1} \quad \text{a} \quad \frac{\sigma_{\beta_{i1}}^2}{\sigma_{\beta_1}^2 + \sigma_{\beta_{i1}}^2} \quad \text{pro všechna } \bar{\beta}_1 \quad (1.76)$$

Důležitou charakteristikou těchto vah je, že dávají dohromady součet jedna a jejich velikost ovlivňuje míra nejistoty o odhadech. Čím více nejistoty, tím menší váhy. Předpověď bety pro akcii i je pak:

$$\beta_{i2} = \frac{\sigma_{\beta_{i1}}^2}{\sigma_{\beta_1}^2 + \sigma_{\beta_{i1}}^2} \cdot \bar{\beta}_1 + \frac{\sigma_{\beta_1}^2}{\sigma_{\beta_1}^2 + \sigma_{\beta_{i1}}^2} \cdot \beta_{i1} \quad (1.77)$$

$\bar{\beta}_1$	průměrná beta vybraných akcií v historické periodě
β_{i1}	OLS odhad bety akcie i v periodě 1
$\sigma_{\beta_1}^2$	odchylka rozdělení historických odhadů bety všech vybraných akcií
$\sigma_{\beta_{i1}}^2$	odchylka odhadů bety pro akcii i v časové periodě 1.

Jak Vašíček ukázal, jedná se o Bayesiánskou odhadovou techniku. Tato Vašíčkova procedura nepředpokládá trvalý trend u bet jako to dělá Blumova metoda, trpí zaujatostí. Nevýhodou je, že tento vážený postup přizpůsobuje pozorování s větší standardní chybou blíže směrem ke střední hodnotě, než pozorování s malou standardní chybou. To znamená, že akcie s vysokou betou a tedy i s větší standardní chybou budou mít své bety snižené o větší procento vzdálenosti od průměrné bety. Vašíčkovy odhady budoucí bety budou v průměru nižší, než průměrná beta ve vzorku akcií, pro které byly bety odhadovány. Z tohoto důvodu může být Vašíčkova beta zpřesněná tím, že se přizpůsobí všechny bety nahoru tak, aby měly stejnou střední hodnotu jako jakou měly v historickém období.

Přesnost přizpůsobování

Srovnajme Blume a Bayesian techniku v porovnání s nepřizpůsobenými betami. Klemkosky a Martin (1975) testovali schopnost těchto technik předpovídat bety

²⁰Vašíček O. (1973) A note of using cross sectional information in Bayesian estimation of security betas, Journal of Finance 28, 1233-1239

pro tři pětiletá období 1-akciového a 10-akciového portfolia. V obou případech přizpůsobovací techniky vedly k přesnější předpovědi budoucích bet než nepřizpůsobené bety. Průměrná čtvercová chyba v předpovědi bet byla často poloviční, než když se použila jedna z přizpůsobovacích technik.

Chyba byla rozložena na část, která je špatným ohodnocením průměrné hladiny bet, na část, která je nad (pod)-hodnocena a na část, která není vysvětlena. Jak můžeme očekávat, když byly Blume i Bayesian techniky srovnány s nepřizpůsobenými betami, skoro všechny poklesy v chybě přišly z toho, že se zredukovaly tendence podhodnocování nízkých bet a nadhodnocování vysokých bet. To není nic překvapivého, protože to je přesně to, pro co byly tyto techniky vymyšleny. Klemkosky a Martin shledovali, že Bayesian technika podala lepší výkon než Blume technika, ale s malým rozdílem.

Většina literatury, která se zajímá problémem bet hodnotí přizpůsobovací techniku bet jako lepší pro jejich předpověď.

Eubank a Zumwalt (1979) objevili, že přizpůsobovací techniky jsou více nápomocné v redukování chyb jednotlivých akcí a pro kratší odhady a předpovědi než pro portfolio. V kontrastu s Lallym (1994) shledali Blume techniku překonávající Vašíčkovu metodu v kratší periodě, v dlouhé periodě se rozily prý vyrovnávají.

Další způsob, jak testovat užitečnost bet stejně tak, jako kvalitu předpovědi bet je, jak dobře bety předpovědí korelační strukturu mezi cennými papíry. Elton, Gruber a Ulrich srovnali u následujících modelů předpovídání korelační struktury mezi cennými papíry:

1. Historická korelační matice.
2. Předpověď korelační matice, která vznikla odhadem bet z historického období.
3. Předpověď korelační matice odhadem bet ze dvou předešlých období a zmodernizováním pomocí Blume techniky.
4. Předpovědi jsou vypočítány podle třetího modelu, ale zmodernizování pomocí Vašíček-Bayesian techniky.

Výsledkem studie bylo, že historická korelační matice sama o sobě je nejslabší ze všech technik. Ve většině případů byla překonána všemi technikami, které předpovídají betu na statisticky významné úrovni.

Srovnání dalších tří technik určování bety je více neurčité. V každém ze dvou 5-letých vzorkových testů Blume přizpůsobovací technika dává lepší výsledky než nepřizpůsobené bety a přizpůsobené bety pomocí Bayesian techniky. Rozdíl v technikách byl statisticky významný. Ale Bayesian přizpůsobovací technika je lepší než nepřizpůsobení bet v jednom období a horší v druhém období. V obou případech

byly výsledky statisticky významné.

Model s nepřizpůsobenými betami předpokládá, že jediná korelace mezi cennými papíry je totožná pouze díky společné korelaci s trhem. Neuvažuje ostatní zdroje korelací, máme na mysli např. industriální efekty. Tato technika tak podhodnotí průměrný korelační koeficient u dat, na kterých je použita. Elton, Gruber a Ulrich to dokumentovali u obou období, na které byl model aplikován.

Blume technika je oslabena systematickou chybou, a to kvůli dvěma dodatečným zdrojům. Prvním je inklinování bet směrem k jedné, což zvyšuje průměrný korelační koeficient. Druhým problémem je, že Blume technika přizpůsobuje bety v druhém období pro změny v prvním a druhém obdobích. Tedy pak se průměrná pozitivní (negativní) změna v betě mezi prvním a druhým období přizpůsobí v druhém období a je pak výše (níže).

Bayesian technika také trpí systematickou chybou, a to kvůli jejich tendenci se přibližovat k jedné, ale v porovnání s Blume technikou to nemá pokračující trend. Dalším zdrojem systémových chyb je tendence snížit bety a korelační koeficienty směrem dolů. Je to z toho důvodu, že vysoká beta akcií se více přizpůsobuje směrem ke střední hodnotě než nízká cena akcií. Tento zdroj náhodnosti se ale může eliminovat. Prvním způsobem je vyrovnat průměrný korelační koeficient s průměrným korelačním koeficientem z minulého testovaného období.

Elton, Gruber a Ulrich dosli k závěru, že Bayesian technika byla nejpřesnější předpovědi budoucí korelační matice. Její rozdíly od ostatních sledovaných metod byly statisticky významné ve všech sledovaných obdobích.

1.9.4 Fundamentální bety

Bety měří pouze vztah mezi návratnostmi akcie a návratností trhu, ale odhady budoucích bet by mohlo zlepšit uvedení dalších proměnných, které můžou být považovány za faktory ovlivňující risk. Beaver, Kettler, Scholes (1970) zkoumali vztah mezi betou a sedmi specifickými firemními proměnnými:

1. Vyplacené dividendy (negativní vztah, vyšší vyplacené dividendy snižují risk). Pokud management více dividendy snižuje než zvyšuje, vysoké výplaty jsou ukazatelem důvěry v část managementu, která se zabývá budoucím výdělkem. Také to může být zdůvodněno tím, že dividendové výplaty jsou méně riskantní než kapitálové zisky, tedy společnost vyplácející více svých výdělků na dividendy je méně riskantní.
2. Růst akcií (pozitivní asociace s riskem). Růst je obvykle pozitivně spojován s betou, vysoce růstové firmy jsou považovány za více riskantní než nízko růstové firmy.

3. Finanční síla (pozitivní vztah). Finanční síla má tendenci zvyšovat volatilitu příjmového toku a tím zvyšovat riziko a betu.
4. Likvidita (negativní vztah). Firma s vysokou likviditou je považována za méně riskantní než firma s nízkou likviditou.
5. Velikost aktiv (negativní vztah). Velké firmy jsou považovány za méně rizikové než malé, je to zdůvodněno tím, že velké firmy mají lepší přístup ke kapitálovému trhu a tím by měly mít nižší betu.
6. Příjmové proměnné (pozitivní vztah). Čím více proměnný firemní příjmový tok, tím vyšší korelace s trhem a tím je vyšší její beta.
7. Účetní beta neboli cash-flow (pozitivní vztah). Účetní beta ukazuje pevný vztah mezi zisky firmy a agregátními zisky z akcií. Beaver a Manegold (1975) dokumentovali, že účetní nebo-li cash-flow beta je vysoce pozitivně korelována s betami akcií. Nicméně toto relativně nepopulární měření není výhodnější než oceňování akcií na základě měření bety a data požadovaná pro oceňování akcií pomocí měření bety jsou běžně dostupné.

Obyčejně se beta spojuje s několika fundamentálními proměnnými pomocí složené regresní analýzy. Pozdější studie používali více proměnných, například jako Thompson (1978), který použil 43 proměnných, nebo Rosenberg (1973) použil dokonce 101 takových proměnných.

Odhady bety z historických dat nemusí být nejlepší odhady budoucí bety, například z důvodu toho, že mají tendenci korelovat k jedné. Předpověďací model pro bety ale může být nápomocný. Jedním jednoduchým přístupem²¹ je nasbírat data v rozlišných periodách a odhadnout regresní rovnici:

$$\text{Současná } \beta = a + b(\text{Minulá } \beta)$$

Díky odhadům a a b je pak možné předpovědět budoucí betu následovně:

$$\text{Předpovězená } \beta = a + b(\text{Současná } \beta)$$

Rosenberg a Guy objevili, že proměnné, které pomáhají předpovídat bety zahrnují změnu příjmů, změnu cash-flow, velikost firmy, vyplácení dividendů...

Rosenberg a Guy (1976) se zabývali předvídaní bety, které jsou ovlivňovány finančními proměnnými. Navrhli následující rovnici:

²¹Boldie, Kane, Marcus, 1996, Investments

Současná $\beta = a + b_1(\text{Minulá } \beta) + \sum_{i=2}^n b_i(\text{firemní finanční charakteristiky})$

b_i	specifické firemní finanční charakteristiky
n	počet finančních charakteristik

Síla a slabost fundamentálních a historických bet

Výhodou historických bet je, že měří odezvu každé akcie na tržní pohyby. Její nevýhodou ale je, že reflektuje změny ve velikosti a nebo důležitosti firemních charakteristik pouze po dlouhém období. Například pokud společnost zvýší svůj ukazatel zadluženosti, předpokládáme zvýšení bety. Ale pokud máme 60 - měsíční návratnostní data k odhadu bet, poté jeden měsíc po tom, co firma zvýší ukazatel zadluženosti k jmění, pouze poslední data budou reflektovat změny. Z tohoto důvodu historické odhady jsou méně citlivá k strukturálním změnám a operacím společností a závisí na požitém intervalu.

Naopak užití fundamentálních bet předpokládá, že citlivost všech bet k základním fundamentálním proměnným je shodná, což je slabostí této metody. Výhodou ale je, že fundamentální bety reagují relativně rychle na změny firemních charakteristik.

Rosenberg předpokládá, že kombinací technik historické a fundamentální bety v jeden systém získá výhody z každé. Rosenberg objevil trvalé rozdíly mezi betami rozdílných odvětví a na základě tohoto objevu prováděl analýzy na zjištění těchto rozdílů. I když je Rosenberg technika jednoduchá, velké množství parametrů dělá parametrizovaný model složitým. Zlepšuje ale předpovědní schopnost, vede k lepším odhadům budoucích bet než užití jakékoliv druhu odhadu v izolaci. Jeho systém rychle reflektuje změny v betě, protože používá data, která odrážejí přítomné podmínky k modifikování historických odhadů bet.

1.10 Kritika modelu CAPM

Skoro již od data, kdy W. Sharpe publikoval metodu CAPM, je model pod palbou kritiků a byl vystaven nesčetněkrát empirickým testům. Kritizovány jsou hlavně jeho zjednodušující předpoklady, a to:

- dokonalý trh
- bezrizikové sazby r_f
- zanedbávání daně a transakčních nákladů
- stejná očekávání investorů a stejná averze k riziku

Model kritizoval například Richard Roll²². Ve svém odborném článku argumentoval, že je model CAPM absolutně neuskutečnitelný. Index burzy podle Rolla neumí dostačujícím způsobem aproximovat tržní portfolio. Protože nikdo není schopen změřit skutečné tržní portfolio, pouze je zastoupeno indexem, a nikdo neumí hned změřit očekávanou návratnost, jediné průměr realizované jedné akcie, je nemožné znát, zda je korektní vztah, který je právě testován. Empirické testy tedy slouží pouze ke zjištění efektivnosti portfolií.

1.10.1 Empirické studie modelu CAPM

Podle nesčetných testů, kterým byl model CAPM vystaven, byl potvrzen zejména lineární vztah mezi výnosností a systematickým rizikem. Nepotvrzena ale byla například rovnost mezi bezrizikovou sazbou a výnosem portfolií, které nejsou korelovány s tržním portfoliem.

To, že s narůstající výnosovou mírou roste riziko a lineárnost tohoto vztahu potvrdili například ve své studii Fama a MacBeth. Práce od Bluma a Frienda také potvrdila lineárnost tohoto vztahu, ale zamítla rovnost mezi výpůjční a zápůjční úrokovou sazbou.

Model CAPM byl ve studii od Blacka, Jensena a Scholese (1972) zamítnut i přesto, že koeficienty α a β byly statisticky významné. Jejich hodnota vždy byla ale větší pro α a menší pro β , než jaké odpovídají rovnici modelu.

Podniknuté empirické testy se odlišovaly použitou testovací metodou a aplikováním na různých datech, ale z většiny případů byl model zamítnut.

I když spousta empirických studií model zamítla, nemusí to nutně znamenat neplatnost modelu. Model CAPM je pouze obecným modelem, můžeme s ním oceňovat všechna existující aktiva, a tedy neplatnost může být zapříčiněna špatným aplikováním empirických metod nebo volením špatných proměnných.

Rozšíření modelu CAPM

V roce 1996 publikoval S. Ross odlišný model - Arbitrage Theory (APT), který se vyhýbá potřeby specifikovat tržní portfolio. Ačkoliv se tento model považuje za více účinný než CAPM, je méně intuitivní a více složitější na zrealizování. V APT je návratnost cenných papírů spojena s mnohočetnými ekonomickými faktory náhradou za tržní portfolio.

Dalším pokusem modifikace modelu CAPM zahrnuje zachycení modelu v čase - Consumption Capital Asset Pricing Model (CCAPM). S tímto modelem může investor vzít v úvahu důsledky z vícenásobných period, ne jen z jedné minulé, jak to

²²Roll, Richard. A critique of the asset pricing theory's tests. Journal of Financial Economics, 1977, vol. 4, s. 129-176.

dělá model CAPM. Tento model se ukazuje být užitečný v situacích, kde normální CAPM zklame.

Dodnes se užívá mnoho dalších modifikací modelu CAPM pro specifické situace a je to tedy důkazem toho, že se dá model široce využívat.

Kapitola 2

Praktické výpočty na datech BCPP

2.1 Informace o Burze cenných papírů Praha,a.s.

¹ Po teoretických východiscích se nyní budeme zabývat analýzou reálných emisí akcií obchodovatelných na Burze cenných papírů Praha,a.s. (BCPP), která je jedním z organizátorů veřejného trhu s cennými papíry.² Jako většina burz působících v Evropě funguje na členském principu. Jen členové zapsaní v obchodním rejstříku se mohou stát právnickou či fyzickou osobou, která díky členství může provádět nákupy a prodeje cenných papírů na burze.

Dne 06.04.2008 tomu bude již patnáct let, co Burza cenných papírů Praha zprostředkovává investování do různých druhů investičních nástrojů. Objem ochodů pro příklad u akcií se v celém funkčním období burzy vyšplhal k hodnotě 5,5 bil. Kč, pro představu taková suma tvoří přibližně pět krát větší hodnotu, než jaké dosahuje příjem státního rozpočtu ČR na rok 2008.

Mezi další nejobchodovanější investiční nástroje v uplynulých patnácti letech patří dluhopisy, u kterých celkový objem tvořil 10,4 bil. Kč. Až do října roku 2006 BCPP nabízela pouze příležitost investovat do akcií, dluhopisů a podílových listů, teprve poté burza zahájila obchodování s investičními certifikáty, futures a i warranty.

Obchodovat burza začala s jednou akcií, poté přibýly čtyři emise dluhopisů a dva podílové listy. Divoký vzrůst emisí na více než 1700 titulů vznikl díky druhé vlně kuponové privatizace, mnoho jich ale zapříčiněním nulové likvidity rychle zaniklo. V současnosti je na trhu pražské burzy možnost uzavírat obchody s 33 akciemi, 117 dluhopisy, 45 investičními certifikáty, 2 warranty a 6 sériemi futures. Největšího objemu akciových obchodů zaznamenala burza v roce 2005, v hodnotě

¹Zdroj:Zdroj:<http://www.pse.cz/novinky>

²Druhým organizátorem je RM-systém, a.s., (RMS), který realizuje pouze mimoburzovní operace s cennými papíry.

1,041 bil. Kč a historicky nejúspěšnější den byl 19.9.2005 s hodnotou 14,463 mld. Kč.

Klíčovým indexem BCCP je index PX. Obecně smyslem indexů je koncentrovat do jediného čísla ceny mnoha akcií na dané burze, díky tomu slouží jako ukazatel kapitálového vývoje na kapitálovém trhu a je vzorem pro investiční portfolia.

3

Emise	Váha [%]
ČEZ	26,36
ERSTE BANK	20,35
TELEFÓNICA O2 C.R.	17,63
KOMERČNÍ BANKA	15,52
CETV	5,96
UNIPETROL	5,68
ZENTIVA	3,77
ORCO	1,95
PHILIP MORRIS ČR	1,55
PEGAS NONWOVENS	0,68
ECM	0,35
AAA	0,22
Celkem	100

Tabulka 2.1: Báze indexu PX ke dni 31.01.2008.

2.2 Výběr dat

Pro analýzu využijeme soubor elektronicky uchovaných dat (5-letý soubor dat v intervalu od 31.01.2003 do 31.01.2008) z bezplatného přístupného zdroje www.akcie.cz. Poskytuje historická data z realizovaných obchodů na BCPP a hodnoty indexů PX.

Portfolio bude sestavované z akcií firem ČEZ, Komerční banka, Erste bank, Unipetrol a O2 Telefónica, které byli v celém období od 31.01.2003 do 31.01.2008 nejobchodovanější a nejvýznamnější v bázi indexu PX.

Pro všechny zvolené emise odhadneme model CAPM nejdříve kovarianční metodou jen pro srovnání odhadů a dále pak metodou nejmenších čtverců (OLS), kterou budeme dále více do hloubky rozebírat. Odhady koeficientů označíme b , jenž je odhadem koeficientu β a a bude značit odhad koeficientu α , neboť z teorie již víme, že se jedná pouze o přibližné odhady a nemusejí se nutně například zapříčiněním různých chyb rovnat skutečným hodnotám β a α . Pak pro ně vypočítáme směrodatné odchylky s_a s_b a také koeficient dereminace R^2 , díky kterým pak otestujeme statistickou významnost modelu a statistickou významnost jednotlivých parametrů.

³Zdroj:<http://www.pse.cz/>.

Nutné je model verifikovat také vyhledem k možné proměnlivosti parametrů v čase. Nutné je tedy provést test autokorelace náhodných složek a test heteroskedasticity vzhledem k času. Z teorie víme, že nám tyto testy sice neovlivní odhady parametrů, ale mohou zkreslit výsledky směrodatné odchylky a tím znehodnotit test na statistickou významnost. Pokud nám test nepotvrdí naše očekávání, nemůžeme statistické významnosti přikládat větší váhu a je nutné použít metody, které přizpůsobují betu v čase. Podle studií se nejvíce doporučuje odhad budoucích bet pomocí Blumovy metody a Vašíčkovy-Bayesian metody.

Cílem práce pak bude vypočítat výnos a riziko tři měsíce drženého portfolia, jež je tvořeno z pěti nejlikvidnějších cenných papírů na Burze cenných papírů Praha, které jsme si vybrali. Pro vytvoření optimálního portfolia vypočítáme váhy jednotlivých cenných papírů, které se budou podílet určitým svým podílem na portfoliu. Výpočty provedeme jen pro případ, kdy je sell short zakázán, neboť povolený sell short je v České republice zakázán.

Všechny výpočty budou provedeny především pomocí programu Matlab a částečně také programem Microsoft Excel.

Předpoklady:

- v modelu neuvažujeme zdaňování kapitálových výnosů a také vyplácení dividend
- za bezrizikovou investici r_f vezmeme pokladniční poukázku emitovanou Ministerstvem financí ČR s tříměsíční splatností (od 14.12.2007 do 14.03.2008) s výnosem $3,79\%(p.a)$.⁴
- výnos trhu r_m je reprezentován výnosem indexu PX

ČEZ

ČEZ, a. s., je mateřskou společností Skupiny ČEZ. V České republice mu patří prvenství ve výrobě a distribuci elektřiny. Další významnou činností kromě výroby elektřiny i tepla stojí za zmínku další jeho činnosti, například těžba surovin, udržuje energetické zařízení, provozuje telekomunikační služby, zabývá se vědou a výzkumem. 1. dubna 2003 ČEZ získal majoritní podíl v 5 z 8 distribučních elektroenergetických společností (Severočeská energetika, Severomoravská energetika, Středočeská energetická, Východočeská energetika a Západočeská energetika). Rokem 2004 započala skupina ČEZ rozšiřování své majetkové působnosti i do zahraničí a nyní díky akvizicím proniká především na trhy jihovýchodní Evropy, kde se chce stát lídrem na trhu s energií. Akcie společnosti jsou nejlikvidnější na pražské burze.

⁴Informace jsem čerpala na serveru <http://www.cnb.cz>.

Komerční banka

Komerční banka náleží čestné místo mezi třemi nejvýznamnějšími bankami jak v České republice, tak i v regionu střední a východní Evropy. Patří do skupiny Sociétés Générale (čtvrtá největší bankovní skupina v EU) a jejích služeb využívá 19,2 miliónů klientů po celém světě. Klientům poskytována komplexní služba v oblasti drobných, podnikových a investičních bankovníctví. Klientům jsou nabízeny kromě depozitních a úvěrových produktů a platebních služeb také možnosti zřídit si pojištění či důchodové připojištění, uzavřít smlouvy o stavebním spoření i leasingové smlouvy, nebo také služby kapitálového trhu. Svou překapitalizaci řešila Komerční banka výplacem vysoké dividendy v roce 2003 a 2004 a v roce 2005 opět vyplátila vysokou dividendu ve výši 250 Kč/akcii. Růst komerční banky v dnešní době je odůvodňován rozšiřováním báze klientů a zefektivňováním provozní činnosti.

Unipetrol

Holdingová společnost Unipetrol je zpracovatelem ropy. Její rafinérské produkty jsou hlavně pohonné hmoty, maziva a také petrochemické produkty a polotovary. Založena byla tato společnost v roce 1994 po privatizaci petrochemického průmyslu v České republice. Pod křídla Unipetrolu se postupem času začleněly akciové společnosti jako Kaučuk, Chemopetrol, Benzina, Paramo, Koramo, Česká rafinérská, Unipetrol Trade, Spolana a Unipetrol Rafinérie. Stát vlastnil 62,9% společnosti do roku 2004, kdy tento podíl od něj odkoupil polský koncern PKN Orlen. V současné době došlo ke markantnímu zvýšení ziskovosti, je to připočítáváno nárůstu cen ropy. Unipetrol postupně prodává některé své části s ním nesouvisející, aby tak zvýšil efektivnost svého hospodaření.

Erste bank

Pražská burza začala obchodovat s Erste bank náhradou za akcie České spořitelny poté, co byla odkoupena a začleněna do skupiny Erste Bank. Erste bank patří mezi zajímavé tituly z pohledu akviziční aktivity ve střední a východní Evropě.

Telefónica O2

Telefónica O2 je lídrem telekomunikačních společností v České republice, patří mezi největší firmy ve střední a východní Evropě. Telefónica O2 Czech Republic vznikla dne 1. července 2006 spojením společností ČESKÝ TELECOM, a.s. a Eurotel Praha, spol. s r.o. Telefónica O2 Czech Republic patří do skupiny společností, kterou zastřešuje O2.

Telefónica O2 Czech Republic nabízí kompletní hlasové, datové a internetové služby v pevných a mobilních technologiích. Služby jsou orientovány na dva základní segmenty zákazníků: spotřebitelský segment a podnikatelský segment. Společnost je také poskytovatelem velkoobchodních služeb ostatním provozovatelům veřejných telekomunikačních sítí a poskytovatelům veřejných telekomunikačních služeb v České

republike a také v zahraničí. Telefónica O2 Č.R. patří mezi nejlikvidnější tituly na naší burze.

2.2.1 Výpočet výnosností akcií a trhu

Podle rovnic (1.1) a (1.2) získáme očekávané měsíční výnosnosti $\bar{r}_i$ cenných papírů společností ČEZ, Komerční banka, Erste bank, Unipetrol a Telefonica O2 a také očekávané měsíční výnosnosti trhu r_m , který je reprezentován výnosem indexu PX. Viz. obrázek A.1 v příloze.

Emise	$\bar{r}_i$
ČEZ	0.0477
Komerční banka	0.0120
Unipetrol	0.0406
Erste bank	0.0009
Telefónica O2	0.0120

Tabulka 2.2: Průměrné měsíční výnosnosti akcií.

Index	$r_m \& r_f$
PX	0.0212
Bezriziková sazba	0.0032

Tabulka 2.3: Průměrná měsíční výnosnost trhu a bezrizikové sazby.

2.3 Výpočet alfy a bety

Odhadování parametrů metodou OLS

Z teorie víme, že odhad parametrů pomocí kovariance návratnosti jednotlivých akcií s trhem a variace návratnosti trhu je nejméně přesný. Přesto si hodnoty parametrů beta a koeficient determinace uvedeme pro srovnání.

Emise	β	koeficient determinace
ČEZ	1.3613	0.6673
Komerční banka	0.8041	0.4602
Unipetrol	1.0381	0.2170
Erste bank	1.0992	0.2292
Telefónica O2	0.8298	0.3427

Tabulka 2.4: Kovariční odhad bety.

⁵Výpočet viz rovnice č.(1.57), (1.30).

Nyní provedeme výpočet odhadů parametrů lineární regrese metodou nejmenších čtverců, vypočteme směrodatné odchylky parametrů a koeficient determinace, výsledky jsou uvedené v tabulce 2.5.

Historický odhad bety vyšel větší jako jedna u akcií ČEZU, Unipetrolu a Erste bank, tedy je můžeme klasifikovat jako agresivní, to znamená jejich výnos roste rychleji jako trh. Naopak akcie Komerční banky a Telefonica O2 považujeme za defenzivní, tedy jejich výnos kolísá méně jako trh, neboť odhad bety je menší než jedna. V příloze na obrázku 2-6 je ukázáno grafické řešení, kde jednotlivé body zobrazují návratnost dané akcie v jednom měsíci a nejlepší odhad bety zobrazuje sklon charakteristické přímky.

Podle vypočítaných hodnot odhadů parametru alfa a také podle grafického řešení ukázaného v příloze na obrázku 7 můžeme konstatovat, že cenné papíry jsou podhodnocené u ČEZU a Unipetrolu, zatímco u ostatních cenných papírů jsou nadhodnocené.

Standartní odchylky odhadů bety a alfy nám napovídají, jak se naše odhady liší od skutečných hodnot.

Emise	b	s_b	a	s_a	s	R^2
ČEZ	1.3844	0.1218	0.0196	0.0066	0.0480	0.6901
Komerční banka	0.8177	0.1127	-0.0059	0.0061	0.0444	0,4759
Unipetrol	1.0557	0.2577	0.0184	0.0139	0.1015	0,2244
Erste bank	1.1179	0.2634	-0.0224	0.0142	0.1037	0,2370
Telefónica O2	0.8439	0.1496	-0.0063	0.0081	0.0589	0.3544

Tabulka 2.5: Odhad metodou OLS.

Statistická významnost modelu

Statistickou významnost modelu jako celku a vhodnost použití modelu nám pomáhá ověřovat koeficient determinace $0 \leq R^2 \leq 1$. Udává, nakolik procentuálně výnosová míra trhu vysvětluje výnosovou míru cenného papíru. U společnosti ČEZ dosahoval R^2 69.00%, tedy model vysvětluje 69.00% nadměrných výnosů aktiv. U ostatních společností nepřekročil hodnotu 50%. Porovnáním hodnot R^2 v tabulce .2 a .3 zjistíme, že je podle očekávání lepší použít metodu nejmenších čtverců.

F-statistikou potvrdíme statistickou významnost koeficientu determinace.

Z tabulek F- rozdělení získáme hodnotu $F_{0,05;1;58} = 4.006$, jenž je menší než F_r pro všechny emise, proto můžeme všechny modely na 5-procentní hladině významnosti označit za statisticky významné.

⁶Výpočet viz rovnice č.(1.60), (1.63), (1.61), (1.64), (1.62) a (1.65).

⁷

Emise	F_r
ČEZ	129.1500
Komerční banka	52.67209
Unipetrol	16.78023
Erste bank	18.0184
Telefónica O2	31.8401

Tabulka 2.6: F-statistika.

Statistická významnost alfy a bety

Statistickou významnost parametrů potvrdíme nebo vyvrátíme za pomoci t-statistiky. Získané hodnoty jsou uvedeny v tabulce 2.7. Z tabulek Studentova-rozdělení vyčteme hodnotu $t_{0,05/2;58} = 2.0018$. Tato hodnota je menší pouze pro t_b u všech emisí, zatímco větší u t_a . Vyplývá z toho, že odhad parametru beta je staticky významný a odhad koeficientu alfa nikoliv. Podařilo se nám tedy prokázat, že nadměrný výnos aktiv je závislý na nadměrném výnosu trhu, ale systematickou chybu v nadhodnocování či podhodnocování aktiv jsme neprokázali.

⁸

Emise	t_b	t_a
ČEZ	11.3644	2.9816
Komerční banka	7.2575	0.9650
Unipetrol	4.0964	1.3275
Erste bank	4.2448	1.5766
Telefónica O2	5.6427	0.7867

Tabulka 2.7: t-statistika.

Testování autokorelace

⁹

Emise	d
ČEZ	2.1442
Komerční banka	1.8901
Unipetrol	1.9584
Erste bank	2.0304
Telefónica O2	2.5393

Tabulka 2.8: Durbin-Watsonový test.

Zjištěním Durbin-Watsonova koeficientu jsme si ověřili, že rezidua u všech emisí nejsou autokorelovaná.

⁷Výpočet pomocí rovnice č.(1.66).

⁸Vypočteno pomocí rovnic č.(1.68) a (1.69).

⁹Vypočteno pomocí rovnice č.(1.73).

Testování heteroskedasticity

Provedeme test heteroskedasticity vzhledem k času:

10

Emise	F_1	F_2
ČEZ	1.2732	0.7854
Komerční banka	0.7415	1.3487
Unipetrol	2.7510	0.3635
Erste bank	11.1182	0.0899
Telefónica O2	2.3047	0.4339

Tabulka 2.9: Goldfeld-Quandtův test.

Tyto vypočítané hodnoty porovnáme s kritickou hodnotou Fisherova rozložení $F_{27,27}$ na hladině významnosti 5%, která je asi 1.9. Na 5-procentní hladině významnosti můžeme zamítnout existenci heteroskedasticity (tzn. vypočítané hodnoty menší než hodnota 1.9) jen u emisí Čezu a Komerční banky. Jen u těchto dvou emisí se rozptýl náhodné složky v čase nemění.

Odhad předpovídané bety

Odhad metodou OLS nám nedává nejpřesnější odhad budoucí bety, je to způsobeno nestabilitou bety v čase a tendencemi bety přibližovat se k jedné. Díky nesčetným empirickým testům, které byly provedeny, už z teoretické části víme, že nejpřesnější předpověď bety získáme Blume a Vašíčkovo-Bayesian metodou. Obě tyto metody na našich datech aplikujeme a následně zjištěné výsledky porovnáme.

Blumeho metoda

Podle Blumeho je budoucí předpověď bety v dalším období vypočítána z odhadu bety metodou OLS z minulého období. Odhady bety z tabulky 2.5 jednoduše dosadíme do Blumeho rovnice a získáme následující předpovědi:

11

Emise	Předpověď bety
ČEZ	1.2664
Komerční banka	0.8884
Unipetrol	1.0472
Erste bank	1.0886
Telefónica O2	0.9059

Tabulka 2.10: Blumeho odhad předpovězené bety.

¹⁰Vypočteno pomocí rovnice č.(1.73).

¹¹Výpočet proveden pomocí rovnice č.(1.76).

Vašíčkova metoda

Pro získání historických odhadů bet si pětiletá data rozdělíme na pět ročních intervalů a pro každou periodu zvlášť vypočítáme metodou OLS odhad parametrů beta. Intervaly jsou sezařeny:

- únor 2008-březen 2007
- únor 2007-březen 2006
- únor 2006-březen 2005
- únor 2005-březen 2004
- únor 2004-březen 2003

Emise	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
ČEZ	1.127	1.1295	2.1303	1.5475	1.2316
Komerční banka	0.6785	0.6496	1.1313	1.1697	0.9638
Unipetrol	0.8454	1.7797	2.8935	-0.6124	0.6109
Erste bank	1.1619	0.9797	0.6548	2.3451	0.5427
Telefónica O2	0.7453	1.2067	-0.3425	0, 8855	2.2062

Tabulka 2.11: Odhad bety metodou OLS v každém z pěti intervalů.

Emise	s_{b1}	s_{b2}	s_{b3}	s_{b4}	s_{b5}
ČEZ	0.1584	0.3496	0.2462	0.3587	0.2794
Komerční banka	0.2281	0.358	0.2396	0.2354	0.2806
Unipetrol	0.2317	0.2862	0.8750	0.7312	0.2902
Erste bank	0.1468	0.2194	0, 260	1.3187	0.1996
Telefónica O2	0.2651	0.3086	0, 3032	0.3075	0.3147

Tabulka 2.12: Odchyly odhadů beta v každém z pěti intervalů.

Emise	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
ČEZ	7, 1166	3, 2312	8, 6541	4, 3144	4, 4087
Komerční banka	2, 9745	1, 8146*	4, 7207	4, 968	3, 4346
Unipetrol	3, 6482	6, 219	3, 3069	0, 8376*	2, 1053*
Erste bank	7, 9155	4, 4654	2, 5186	1, 7783*	2, 7185
Telefónica O2	2, 8111	3, 9103	1, 1297*	2, 8795	7, 0114

Tabulka 2.13: t-statistiky v každém z pěti intervalů.

Tabulková hodnota t-statistiky $t_{0,05;10} = 2.23$, proto na pětiprocentní hladině významnosti jen odhady bet s hodnotou

$$|t| > t_{0,05;10}, \quad (2.1)$$

můžeme považovat za statisticky významné a má smysl je použít k dalším výpočtům.

Po provedení t-statistiky na 5-procentní hladině významnosti v každém z pěti období jsem symbolem * v tabulce 2.13 označila statisticky nevýznamné odhady koeficientů beta, které v dalších výpočtech nebudeme dále započítávat.

Statistickou významnost všech modelů si ověříme za pomoci statistické významnosti koeficientu determinace ve všech sledovaných obdobích.

Emise	R_1^2	R_2^2	R_3^2	R_4^2	R_5^2
ČEZ	0.8351	0.5108	0.8822	0.6505	0.6603
Komerční banka	0.4694	0.2477	0.6903	0.7117	0.5412
Unipetrol	0.571	0.7946	0.5224	0.0656	0.3071
Erste bank	0.8624	0.666	0.3881	0.2403	0.425
Telefónica O2	0.4414	0.6046	0.1132	0.4533	0.831

Tabulka 2.14: Koeficienty determinace v každém z pěti intervalů.

Emise	F_{R1}^2	F_{R2}^2	F_{R3}^2	F_{R4}^2	F_{R5}^2
ČEZ	50.6428	10.4415	74.8896	18.6123	19.4377
Komerční banka	13.3100	3.2802	22.2893	24.6861	11.7960
Unipetrol	13.3100	38.6855	10.9380	0,7021	4.4321
Erste bank	62.6744	19.9401	6.3425	3.1631	7.3913
Telefónica O2	7.9019	15.2908	1.2765	8.2916	49.1716

Tabulka 2.15: F-statistiky v každém z pěti intervalů.

Tabulková hodnota F-statistiky je $F_{0.95;1;10} = 4.96$, tedy koeficienty determinace v jednotlivých obdobích budememe na pětiprocentní hladině významnosti považovat za statisticky významné, pokud:

$$F_r > F_{0.95;1;10}, \quad (2.2)$$

statisticky nevýznamné hodnoty označíme opět symbolem *, viz tabulka 2.15.

Pro výpočet Vašíčkových vah budeme u každé emise potřebovat odhad bety z posledního období b_1 viz tabulka 2.11 z již provedené metody OLS, odchylku odhadované bety z posledního období s_{b1} viz tabulka 2.12 a k výpočtu vah ještě potřebujeme znát u všech emisí hodnoty odchylek rozdělení historických odhadů bet $\sigma_{\beta_i}^2$, které si vypočítáme:

Emise	$\sigma_{\beta_i}^2$
ČEZ	0.1814
Komerční banka	0.0601
Unipetrol	1.0514
Erste bank	0.0819
Telefónica O2	0.4344

Tabulka 2.16: Odchyly rozdělení historických odhadů bet.

Emise	váha pro β_{i1}	váha pro $\bar{\beta}_1$
ČEZ	0.4661	0.5339
Komerční banka	0.8563	0.1437
Unipetrol	0.1806	0.8194
Erste bank	0.6419	0.3581
Telefónica O2	0.3790	0.6210

Tabulka 2.17: Vašíčkovy váhy.

Emise	Předpověď bety
ČEZ	1.2711
Komerční banka	0.8841
Unipetrol	1.0249
Erste bank	0.9519
Telefónica O2	0.9407

Tabulka 2.18: Vašíčkův odhad předpovězené bety.

V porovnání s předpověďmi bety podle Bluma jsme docílili Vašíčkovou metodou podobných výsledků (liší se v průměru jen o 2%).

Velký rozdíl byl v odhadu pouze u emise Erste bank, který se lišil o přibližně 14%. Tuto odchylku přisuzuji k systematické chybě Blumovy metody, která přisuzuje růsový trend bety i do následujícím období, pokud byl rostoucí trend v minulém období, což nemusí být automatické. Předpověď můžeme upravit tak, že vyrovnáme střední hodnotu s jejich historickými středními hodnotami. Pak získáme jen s malou procentní odchylkou podobný odhad jako tvoří Vašíčkův odhad.

Vašíčkův odhad se podle empirických testů nejvíce přibližuje ke skutečným hodnotám, proto v praktických výpočtech v další kapitole budeme naše odhady b ztožňovat s β .

¹²Výpočet proveden pomocí rovnice č.(1.76).

¹³Výpočet proveden pomocí rovnice č.(1.77).

2.4 Výnosnost a riziko tři měsíce drženého portfolia

Mým úkolem je vypočítat výnosnost a riziko tři měsíce drženého portfolia. Při výpočtech budu dodržovat předpoklad, že je sell short zakázán.

Emise	Průměrné 3-měsíční výnosnosti akcií
ČEZ	0.1431
Komerční banka	0.0361
Unipetrol	0.1219
Erste bank	0.0028
Telefónica O2	0.0361

Tabulka 2.19: Průměrné 3-měsíční výnosnosti akcií.

Index	Průměrná 3-měsíční výnosnost trhu a bezrizikové sazby
PX	0.0636
r_f	0.0095

Tabulka 2.20: Průměrná 3-měsíční výnosnost trhu a bezrizikové sazby.

Při výpočtech budeme dále potřebovat hodnoty rozptylů odchylek náhodných složek. Můžeme je vypočítat z rovnice č.(1.42), pokud si ji upravíme do tvaru:

$$\sigma_{\varepsilon_i}^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 - \sigma_i^2, \quad (2.3)$$

neboť za hodnotu β_i dosazujeme Vašíčkův odhad bety b a σ_M^2 i σ_i^2 jednoduše vypočítáme díky znalosti čtvrtletních výnosností a programu Microsoft Excel. Hodnoty směrodatné odchylky u všech emisí jsou pak druhou mocninou rozptylů $\sigma_{\varepsilon_i}^2$:

Emise	$\sigma_{\varepsilon_i}^2$
ČEZ	0.0092
Komerční banka	0.0049
Unipetrol	0.0309
Erste bank	0.0344
Telefónica O2	0.0089

Tabulka 2.21: Rozptyly náhodné chyby.

2.4.1 Výpočet podílů jednotlivých vybraných cenných papírů v portfoliu

Emise	$\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}$
ČEZ	0.1051
Komerční banka	0.0301
Unipetrol	0.1097
Erste bank	-0.0071
Telefónica O2	0.0283

Tabulka 2.22: Pomocné výpočty pro výpočet podílu CP v portfoliu.

Nejdříve jsme si vypočítali hodnoty zlomků $\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}$ u jednotlivých cenných papírů všech pěti společností, abychom mohli na základě tohoto výpočtu společnosti seřadit sestupně podle velikosti těchto hodnot.

Emise	$\frac{(\bar{r}_i - r_f)\beta_i}{\sigma_{\varepsilon_i}^2}$	$\frac{\beta_i^2}{\sigma_{\varepsilon_i}^2}$	$\sum_{i=1}^n \frac{(\bar{r}_i - r_f)\beta_i}{\sigma_{\varepsilon_i}^2}$	$\sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2}{\sigma_{\varepsilon_i}^2}$	C_i	Z_i
Unipetrol	3.7338	34.0358	3.7338	34.0358	0.0232	1.4495
ČEZ	18.5568	176.5177	18.5568	176.5177	0.0612	5.4294
Komerční banka	4.7905	159.0878	26.7689	365.0289	0.0544	—
Telefónica O2	2.8233	99.8767	29.9046	469.5180	0.0501	—
Erste bank	-0.1860	26.3386	29.7185	495.8566	0.0477	—

Tabulka 2.23: Pomocné výpočty pro výpočet podílu CP v portfoliu.

Postupně jsme za pomoci mezivýpočtů získali hodnoty $C_1, C_2, C_3, \dots, C_5$ na základě vztahu (1.55), viz tabulka 2.23.

Pro výpočet Z_i jsme dosadili do rovnice (1.54) za hodnotu C^* $C_2 = 0.0612$, protože v pořadí jako poslední splňuje podmínku $C_i < \frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}$. Ukázalo se tedy, že pouze emise ČEZU a Unipetrolu jako jediné splňují onu podmínku. Číslem C^* jsme si zajistili, že všechny váhy cenných papírů budou kladné, což je nutná podmínka při zakázaném prodeji nakrátko.

Zjištěním hodnot Z_1 a Z_2 pak můžeme vypočítat z rovnice 1.56 podíly těchto dvou cenných papírů, Unipetrolu a ČEZU, v portfoliu. Podíly Komerční banky, Erste bank a Telefónicy O2 budou nulové, neboť tyto společnosti nesplňovaly podmínky zakázaného prodeje nakrátko. Podíly s nutnou podmínkou $\sum_{i=1}^n X_i = 1$ vyšly následovně:

Emise	Váha v portfoliu
Unipetrol	0.2108
ČEZ	0.7892
Komerční banka	0.0000
Telefónica O2	0.0000
Erste bank	0.0000

Tabulka 2.24: Podíly jednotlivých CP v portfoliu.

2.4.2 Výpočet výnosnosti a rizika portfolia

Vypočítáním procentuálních podílů emisí v portfoliu jsme si doplnili všechny potřebné informace, které jsme potřebovali k výpočtům výnosu a rizika čtvrtletně drženého portfolia:

Výnos a riziko portfolia	¹⁴ v [%]
$\bar{r}_p$	13.87
σ_p	13.71

Tabulka 2.25: Výnosnost a riziko portfolia.

¹⁴Výpočet z rovnic (1.34) a (1.37).

Závěr

V moderní teorii portfolia může být celkové riziko cenného papíru rozdělené na tržní (systematické) riziko a jedinečné (nesystematické riziko). Tržní riziko vyjadřuje pomocí koeficientu beta citlivost na tržní pohyby, což vyplývá ze vztahu mezi návratnostmi cenného papíru a návratnostmi trhu. Tento typ rizika nemůže být eliminován diverzifikací portfolia. Na druhé straně jedinečné riziko cenných papírů reflektuje změny v návratnosti cenných papírů, které jsou ovlivněny faktory specifickými u cenných papírů a ovlivňují jejich cenu. Takový typ rizika může být eliminován diverzifikací portfolia.

Cílem této práce bylo vytvořit portfolio z pěti nejlikvidnějších cenných papírů obchodovaných na BCPP, které bude během následujících tří měsíců drženo a nejlépe zhodnoceno při vyvážení výnosu a rizika. Za použití pětiletých historických dat jsme získali informace o hodnotě bety u všech pěti námi vybraných emisí. Byly nám nápomocné pro předpověď bet emisí v budoucnosti a také pro konstrukci dobře diverzifikovaného portfolia složeného z cenných papírů, které mají redukované jedinečné riziko.

Pro nejpresnější odhad celkového rizika je směrodatné dobře odhadnout tržní riziko, pro které je stěžejní odhad bety. Proto jsme se v teoretické části více do hloubky věnovali jeho odhadu.

Pro předpověď bety jsme využili metodu nejmenších čtverců OLS. Neboť jsou bety nestacionární v čase, je lepší pro odhad použít techniky, které tento předpoklad zahrnují. Jedná se o Blumeho a Vašíčkovu metodu, které používají hodnotu OLS k výpočtu přizpůsobené bety. Díky přizpůsobeným betám získáme mnohem kvalitnější odhady, než u nepřizpůsobených bet, poněvadž odhady bet jsou citlivé i k malým změnám v těchto přizpůsobovacích technikách. I když je metoda OLS nejjednodušší a nejvíce používaná metoda v odhadu bety, z velkého množství empirických studií, které tyto tři metody srovnávaly, vyšlo najevo, že Vašíčkova metoda vyprodukuje nejlepší odhad a nejvíce redukuje předpovědní chybu. Neboť jak Blumeho tak Vašíčkova metoda využívají k výpočtu odhady OLS bety, bylo nutné pro přesné a spolehlivé odhady testovat statistickou významnost jak modelu tak jednotlivých parametrů. Dále pak pro platnost modelu musí být u náhodné složky splněny podmínky nulové střeň hodnoty, konstatního rozptylu a nulové korelace, které bylo nutné také si ověřit.

Po provedení verifikace byly z výpočtu Vašíčkova odhadu vyloučeny statisticky nevýznamné historické bety a předpovězená beta nám vyšla agresivní pouze u společností ČEZ a Unipetrol, defenzivní pak u všech ostatních emisí-Komerční banka, Erste bank a Telefónica O2. Díky těmto předpovězeným hodnotám jsme pak dále mohli vypočítat podíly jednotlivých emisí v portfoliu, tj. jejich procentuální zastoupení.

Z výše uvedených výpočtů nám bylo doporučeno vytvořit portfolio jen ze dvou emisí a to s 79–procentním zastoupením ČEZU a 21–procentním zastoupením společnosti Unipetrol. Takto se nám podařilo portfolio nejlépe diverzifikovat při námi odhadnutém tržním riziku. Pokud bude investor investovat do takto vytvořeného tři měsíce drženého portfolia, může očekávat výnos 13.87% při 13.71% riziku. Záleží ale na investorově postoji k riziku, tedy zda 13.87– procentní výnos vykompenzuje 13.71– procentní riziko možného znehodnocení. Výběr optimálního portfolia investor vybírá už jen podle jeho preferencí.

Příloha A

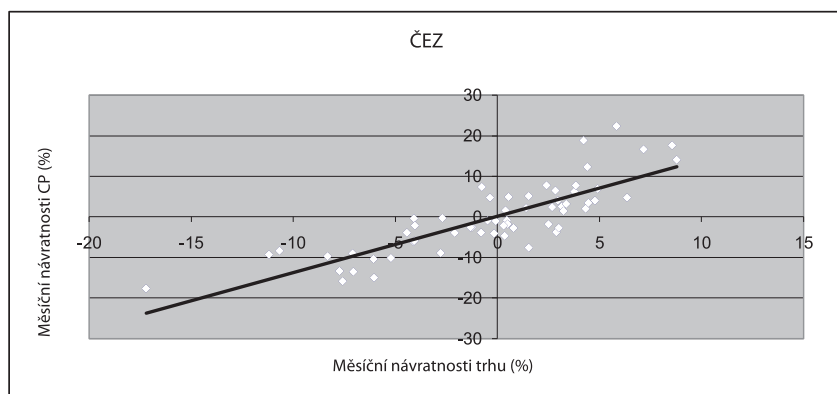
Výčet měsíčních výnosností

měsíc	ČEZ	KB	UNI	EB	O2	PX
II-08	-0,12600	-0,10864	-0,10301	-0,26111	-0,08852	-0,14779
I-08	0,04015	0,09205	0,02396	-0,01836	0,02121	0,02360
XII-07	-0,03297	-0,07279	-0,05748	-0,13444	-0,08322	-0,08237
XI-07	0,11520	-0,03975	0,08185	0,01206	0,09567	0,05288
X-07	0,12397	0,03108	0,11260	0,01084	-0,12363	0,01679
IX-07	0,04211	0,10425	-0,01255	-0,02895	0,06672	0,02907
VIII-07	-0,04653	-0,01106	0,00245	-0,08434	-0,03668	-0,05880
VII-07	0,01107	0,02079	0,03583	-0,00539	-0,03256	0,00351
VI-07	0,04131	0,01326	0,14126	0,01955	-0,00759	0,01962
V-07	0,11265	0,07223	0,02803	0,00061	0,11672	0,06215
IV-07	0,09044	0,05347	0,07045	0,02186	0,03049	0,07223
III-07	-0,08294	0,06044	-0,07095	-0,05546	0,00693	-0,05295
II-07	-0,02542	0,02918	-0,00796	0,03480	0,11361	0,03979
I-07	0,00957	-0,00542	0,05948	0,03540	0,00566	0,02282
XII-06	0,06627	-0,09101	0,08422	0,05819	0,01338	0,02840
XI-06	0,12772	0,04198	0,07102	0,08177	0,06493	0,06287
X-06	-0,03854	-0,00630	-0,04565	0,03288	-0,09222	-0,00337
IX-06	0,01156	0,02052	-0,00147	0,04695	0,00288	0,01645
VIII-06	0,09953	0,01209	0,02055	-0,00930	0,02146	0,02991
VII-06	0,03282	0,03199	0,00987	0,01896	0,05318	0,02946
VI-06	-0,04252	-0,11695	-0,20246	-0,08855	-0,08365	-0,08754
V-06	-0,09936	0,06179	-0,11250	0,01092	-0,02029	-0,03603
IV-06	-0,01037	-0,02114	-0,02036	-0,03035	-0,07336	-0,01669
III-06	0,02894	0,00294	-0,03847	0,08251	0,03373	0,02750
II-06	0,09774	-0,01736	0,26462	-0,06433	-0,00417	0,02080
I-06	0,09075	0,01349	0,02628	0,04951	0,06079	0,05407
XII-05	0,02514	-0,02292	-0,04716	0,03816	-0,00461	0,01199
XI-05	-0,10808	-0,05034	0,00335	-0,02580	0,00625	-0,05142
X-05	0,11949	0,09833	0,22167	-0,01051	0,08748	0,07356
IX-05	0,27379	-0,00209	0,27011	0,04144	-0,00480	0,08282
VIII-05	0,10167	0,05973	0,09351	0,02157	-0,00413	0,03976
VII-05	0,12800	0,03331	-0,01752	0,02961	0,00087	0,04851
VI-05	0,02462	-0,00358	-0,05726	0,06201	0,02979	0,01126
V-05	0,01134	-0,06024	0,05338	-0,05839	0,02197	-0,01993
IV-05	-0,05344	-0,12893	-0,22882	-0,03030	0,10664	-0,03628
III-05	0,21664	0,08278	0,46717	0,09233	-0,07171	0,09606
II-05	0,01265	0,04145	0,29642	-0,04572	0,12603	0,05330
I-05	0,02294	0,00030	0,10173	-0,00083	0,06846	0,03233
XII-04	0,22655	0,07286	-0,02009	0,09954	0,07774	0,11006
XI-04	0,07442	0,08575	0,05367	0,03205	-0,00846	0,05126
X-04	0,23860	0,01025	0,02526	0,05467	-0,01195	0,06666
IX-04	0,07211	0,05601	0,07087	-0,02045	0,06050	0,03849
VIII-04	0,04660	-0,09190	0,05015	-0,75501	-0,02562	-0,01649
VII-04	0,00373	0,04205	-0,06764	0,08940	0,00372	0,02800
VI-04	-0,03967	-0,03741	-0,01009	-0,03848	-0,06489	-0,04653
V-04	-0,00855	-0,08809	0,26838	-0,02223	0,02646	-0,01626
IV-04	0,08477	0,07288	-0,05726	0,11892	0,01509	0,06902
III-04	0,19102	0,12043	-0,01164	0,04365	0,15315	0,11229
II-04	0,02321	0,09918	0,00866	0,08413	-0,00828	0,05452
I-04	0,07577	0,04274	0,06919	0,05792	0,09943	0,05598
XII-03	-0,05093	-0,06212	0,01756	-0,00586	-0,07641	-0,02776
XI-03	0,03220	0,01795	-0,00808	0,12354	0,02258	0,04947
X-03	0,02900	0,00698	-0,02681	0,00959	-0,14548	-0,01601
IX-03	0,09779	0,12425	0,08894	0,08879	0,11624	0,08798
VIII-03	0,17340	0,08358	0,11906	0,02979	0,04315	0,06850
VII-03	-0,08467	-0,03571	0,03218	0,03601	-0,20250	-0,04616
VI-03	0,07052	0,03704	0,05717	0,04995	0,06224	0,06768
V-03	0,08227	0,00452	0,08276	0,06011	0,07537	0,05817
IV-03	0,06496	-0,03212	0,12816	0,05592	0,14212	0,05682
III-03	0,04746	-0,02560	0,05215	0,01379	-0,05604	-0,00254

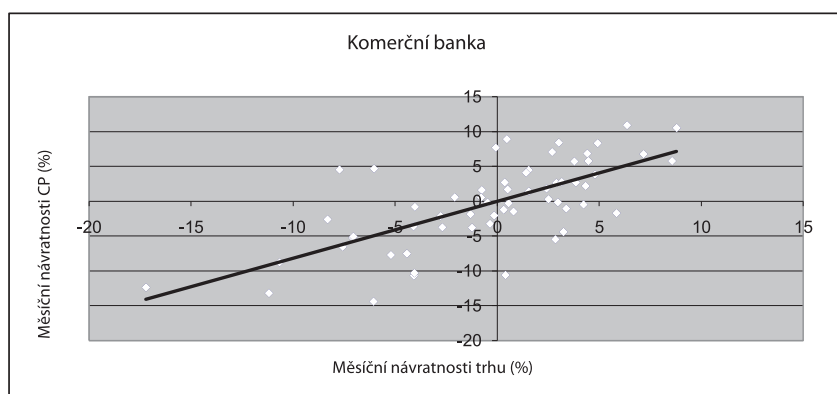
Obrázek A.1: Měsíční výnosnosti jednotlivých společností a indexu PX.

Příloha B

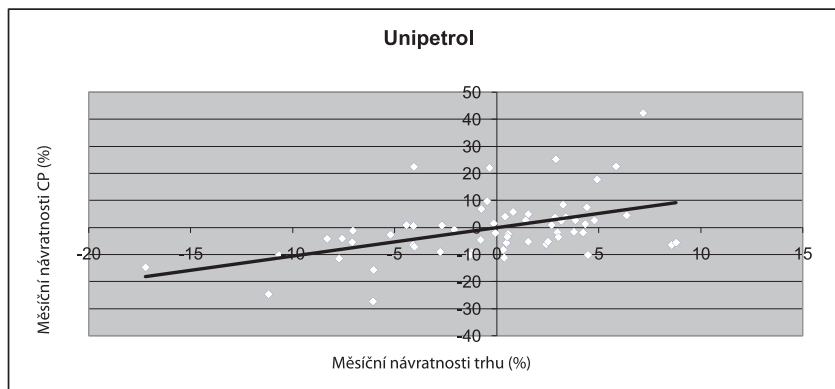
Grafické řešení odhadu parametrů



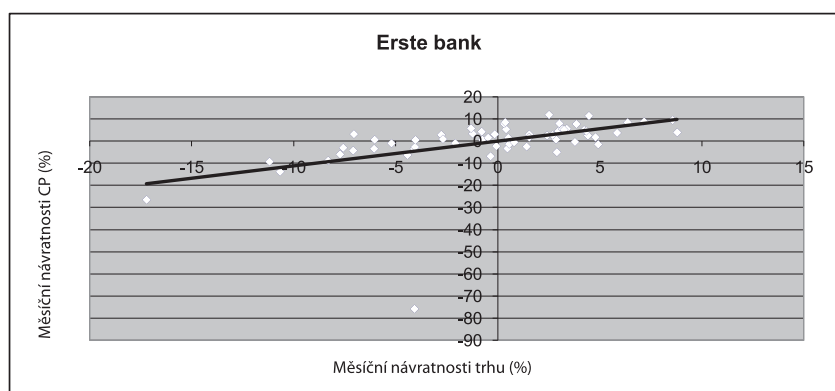
Obrázek B.1: Charakteristická přímka ČEZU.



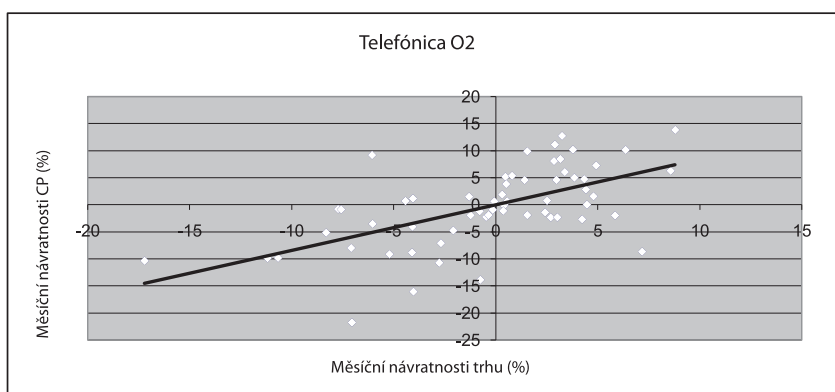
Obrázek B.2: Charakteristická přímka Komerční banky.



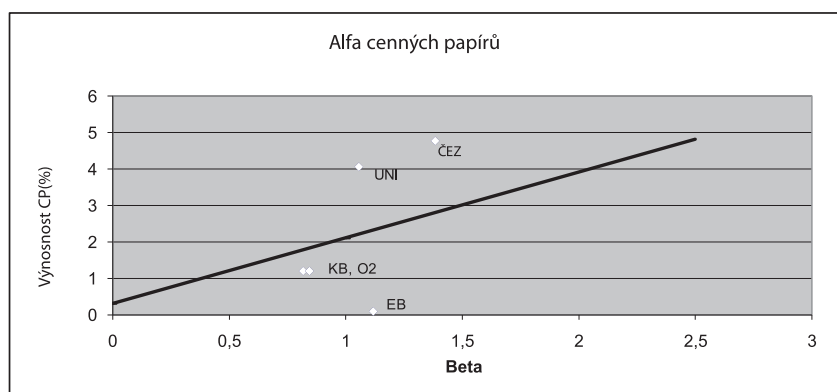
Obrázek B.3: Charakteristická přímka Unipetrolu.



Obrázek B.4: Charakteristická přímka Erste banky.



Obrázek B.5: Charakteristická přímka Telefónica O2.



Obrázek B.6: Alfa cenných papírů u všech společností.

Literatura

- [1] Sharpe William F., Alexander Gordon J.: Investice, Victoria Publishing, Praha, 1994
- [2] Čámský F.: Teorie portfolia, Masarykova univerzita, 2007
- [3] Vašíček O.: A note of using cross sectional information in Bayesian estimation of security betas, str. 1233 – 1239, Journal of Finance 28, 1973
- [4] Blume, Marshall: On the assessment of risk, ,str.1 – 10., Journal of Finance 6, 1971
- [5] Handa P., Kothari S.P., Wasley C.: The relation between the return interval and betas: Implications for the size effect, str.1123 – 1128., Journal of Finance 30, 1989
- [6] Fabozzi F. J., Francis J.C.: Beta as a random coefficient, str.101 – 115, Journal of Finance and quantitative analysis, 1978
- [7] Levy, R.: On the Short-term Stationarity of Beta Coefficients, str. 55 – 62, Financial Analysts Journal, 1971
- [8] Alexander Gordon J., Chervany L., Norman.: On the Estimation and Stability of Beta, str. 123 – 137, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1980
- [9] Theobald M.: Beta Stationarity and Estimation Period: Some Analytical Results, str. 747 – 757, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1981
- [10] Erwin J. Elton, Martin J. Gruber: Modern portfolio Tudory and investment analysis, John Wiley&Sons, INC New York, 1995
- [11] Jílek J.: Finanční trhy pro národohospodáře, Praha, 1997
- [12] Kelbel M., Nováček E.: Analýza portfolia, Elfa.s.r.o Košice, 1998
- [13] Kvasnička M., Vašíček O.: Úvod do analýzy časových řad, Masarykova univerzita, 2001
- [14] Internetové zdroje:
www.akcie.cz
www.pse.cz
www.cnb.cz